



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**CIVIL**

**RAFAEL LEITE DE QUEIROZ**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE COM**  
**INTERFACE GRÁFICA PARA ANÁLISE E**  
**VERIFICAÇÃO DE PONTES FERROVIÁRIAS EM**  
**CONCRETO ARMADO.**

Belém

2010



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**CIVIL**

**RAFAEL LEITE DE QUEIROZ**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE COM**  
**INTERFACE GRÁFICA PARA ANÁLISE E**  
**VERIFICAÇÃO DE PONTES FERROVIÁRIAS EM**  
**CONCRETO ARMADO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Orientador: Ph.D. Remo Magalhães de Souza**

Belém

2010



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**CIVIL**

**RAFAEL LEITE DE QUEIROZ**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE COM INTERFACE**  
**GRÁFICA PARA ANÁLISE E VERIFICAÇÃO DE PONTES**  
**FERROVIÁRIAS EM CONCRETO ARMADO.**

Aprovado em .....de .....de .....

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Ph.D. Remo Magalhães de Souza  
Presidente e Orientador/PPGEC-UFPA

---

Prof. Dra. Regina Augusta Campos Sampaio  
Examinador Interno/PPGEC-UFPA

---

Prof. Dr. Sandoval José Rodrigues Junior  
Examinador Interno/PPGEM-UFPA

---

Prof. Dr. Denilson José Ribeiro Sodré  
Examinador Externo/Faculdade de  
Engenharia Civil/UFPA

---

Prof. Dr. André Maués Brabo Pereira  
Examinador Interno/TecGraf-Puc-Rio

Belém

2010

## RESUMO

Rafael Queiroz. Desenvolvimento de um software com interface gráfica para análise e verificação de pontes ferroviárias em concreto armado.

O trabalho aqui descrito consiste no desenvolvimento de um software que permite realizar análise estrutural, com ênfase em pontes. É dada maior atenção à análise de pontes ferroviárias e a geração automática do carregamento móvel de acordo com os veículos e trens-tipos definidos pelo usuário.

O software denominado *BridgeLab* (Laboratório de Pontes) permite realizar análises de extrema importância no que diz respeito ao projeto e a verificação de estruturas civis. Estas análises são: análise estática, análise pseudo-dinâmica, análise modal e análise dinâmica.

O código do *BridgeLab* foi escrito na plataforma MATLAB®, devido a algumas vantagens apresentadas pela linguagem resultando num menor tempo de programação comparado com o uso de outras linguagens.

As análises realizadas pelo programa baseiam-se no método da rigidez direta e utilizam elemento finito de pórtico espacial o qual apresenta seis graus de liberdade por nó.

O *BridgeLab* além de realizar as análises faz a verificação dos elementos estruturais a partir dos resultados de esforços obtidos em cada análise de acordo com as normas brasileiras, inclusive a verificação a danos por fadiga que é verificada também de acordo com o CEB. A verificação é feita de forma integrada através do programa *SecLab* (Laboratório de Seções).

Após as análises a visualização os resultados, diagramas de esforços, configurações deformadas e formas modais, são feitas na própria interface do *BridgeLab*. A visualização das configurações deformadas da estrutura e das suas formas modais pode ser feita como modelo de barras, utilizando o eixo das barras, ou como sólidos extrudados, considerando a geometria da seção transversal dos elementos.

**Palavra-chave:** Software de Análise Estrutural, Pontes Ferroviárias, Concreto Armado, Análise Modal, Pós-processamento gráfico.

## ABSTRACT

Rafael Queiroz. Development of software with graphical interface for analysis and verification of railway reinforced concrete bridges.

The work described here is the development of software capable to do structural analysis with emphasis on bridges. More attention is given to the analysis of railway bridges and the automatic generation of live load in accordance with the vehicles and trains-types user defined by.

The software called BridgeLab Laboratory (Bridges) is able to do analysis of extreme importance with respect to the design and verification of civil structures. These analysis are: static analysis, pseudo-dynamic analysis, modal analysis and dynamic analysis.

The code at *BridgeLab* was written in MATLAB® platform, due to some advantages of the language resulting in a shorter time of programming.

The analyzes performed by the program are based on the direct stiffness method and use finite element of space frame which presents six degrees of freedom per node.

In addition to performing the analyzes, *BridgeLab* performs the structural elements verification from the results of efforts obtained in each analysis according to the Brazilian standards, including verification of fatigue damages that is also verified according to the CEB. The verification is done in an integrated way through the SecLab (Sections Lab).

After analysis the visualization results, stress diagrams, deformed configurations and modal shapes are done in the BridgeLab interface itself. The visualization of the deformed configurations of the structure and its modal forms can be done as a bar model or as extruded solids, considering the geometry of the cross section of the elements.

**Palavra-chave:** Structural Analysis Software, Railway Bridges, Reinforced Concrete, Modal Analysis, Graphic Post-Processing.

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO.....	7
1.1 INTRODUÇÃO.....	7
1.2 OBJETIVOS.....	9
1.3 METODOLOGIA.....	9
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	10
1.5 CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO.....	13
CAPÍTULO 2 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO.....	15
2.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO.....	16
2.1.1 Campo de Deslocamentos.....	16
2.1.2 Equações de Compatibilidade.....	18
2.1.3 Equações de Equilíbrio.....	21
2.1.4 Equações Constitutivas.....	22
2.1.5 Matriz de Rigidez do Elemento.....	23
2.1.6 Princípio das Forças Virtuais.....	24
2.1.7 Funções Interpoladoras de Forças.....	27
2.1.8 Matriz de Flexibilidade e de Rigidez da Seção.....	29
2.1.9 Matriz de Flexibilidade e Matriz de Rigidez do Elemento.....	30
2.1.10 Matriz de Massa do Elemento.....	34
2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL.....	35
2.2.1 Campo de Deslocamentos.....	35
2.2.2 Equações de Compatibilidade.....	37
2.2.3 Equações de Equilíbrio.....	40
2.2.4 Equações Constitutivas.....	44
2.2.5 Matriz de Rigidez do Elemento.....	44
2.2.6 Princípio das Forças Virtuais.....	45
2.2.7 Funções Interpoladoras de Forças.....	49
2.2.8 Matriz de Flexibilidade e de Rigidez da Seção.....	52
2.2.9 Matriz de Flexibilidade e Matriz de Rigidez do Elemento.....	54
2.2.10 Vetor de Cargas Equivalentes do Elemento.....	59
CAPÍTULO 3 – ANÁLISE ESTÁTICA, PSEUDO-ESTÁTICA, MODAL E DINÂMICA.....	62
3.1 ANÁLISE ESTÁTICA.....	62
3.2 ANÁLISE DINÂMICA.....	63
3.3 ANÁLISE MODAL.....	63
CAPÍTULO 4 – PRESCRIÇÕES NORMATIVAS.....	65
4.1 AÇÕES.....	65
4.1.1 NBR 6120 de 1978, Cargas para o calculo de estruturas de edificações.....	65
4.1.2 NBR 8681 de 2003, Ações e segurança nas estruturas.....	65
4.2 COMBINAÇÕES.....	66
4.2.1 Combinações Últimas:.....	67
4.2.2 Combinações de Serviço:.....	68
4.3 MATERIAIS.....	69
4.3.1 CONCRETO.....	69
4.3.2 AÇO PARA ARMADURA PASSIVA.....	72

CAPÍTULO 5 – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO .....	75
5.1 TELAS DO PROGRAMA .....	78
5.1.1 Telas do Programa.....	78
5.1.2 Geração de nós .....	78
5.1.3 Geração de nós .....	79
5.1.4 Materiais.....	80
5.1.5 Seções.....	81
5.1.6 Lastros .....	83
5.1.7 Aparelhos de apoio.....	85
5.1.8 Veículos.....	87
5.1.9 Trem-Tipo .....	89
CAPÍTULO 6 – VERIFICAÇÃO DAS SEÇÕES DOS ELEMENTOS.....	91
6.1 DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA.....	93
6.2 DIAGRAMA DE INTERAÇÃO.....	94
6.3 SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO .....	95
6.4 FADIGA DOS MATERIAIS .....	98
6.5 ABERTURA DE FISSURAS.....	100
CAPÍTULO 7 – RESULTADOS .....	102
CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	109

## Lista de Figuras

Figura 2-1 – Elemento finito de pórtico espacial.....	16
Figura 2-2 – Configuração deformada de um elemento de pórtico plano.....	17
Figura 2-3 – Campo de deslocamentos de uma seção.....	17
Figura 2-4 – Visualização dos modos de deformação de um elemento infinitesimal. ....	18
Figura 2-5 – Elemento com cargas distribuídas e equilíbrio de um corpo infinitesimal. ....	21
Figura 2-6 – Sistema Básico de Coordenadas.....	24
Figura 2-7 – Reações de Equilíbrio no sistema básico de coordenadas.....	32
Figura 2-8 – Sistema local de coordenadas.....	32
Figura 2-9 – Campo de deslocamentos para o elemento de pórtico espacial.....	36
Figura 2-10 – Visualização das deformações de um elemento infinitesimal, para o caso tridimensional.....	38
Figura 2-11 – Cargas distribuídas ao longo do elemento.....	41
Figura 2-12 – Equilíbrio de um pequeno trecho do elemento submetido a cargas distribuídas. ....	41
Figura 2-13 – Condições de vínculo do sistema básico de coordenadas. ....	45
Figura 2-14 – Condições de contorno do sistema de coordenadas básico. ....	48
Figura 2-15 – Reações de Equilíbrio do Sistema de Coordenadas Básico. ....	56
Figura 2-16 – Sistema de coordenadas local para o elemento espacial. ....	57
Figura 5-1 – Diagrama da Classe <i>Nos</i> .....	76
Figura 5-2 – Diagrama da Classe <i>Barra</i> . ....	77
Figura 5-3 – Tela Principal do Programa.....	78
Figura 5-4 – Interface de criação de nós. ....	79
Figura 5-5 – Banco de dados de materiais. ....	80
Figura 5-6 – Propriedades dos materiais.....	81
Figura 5-7 – Banco de dados de seções. ....	82

Figura 5-8 – Propriedades das seções. ....	83
Figura 5-9 – Banco de dados de lastro. ....	84
Figura 5-10 – Propriedades dos lastros. ....	85
Figura 5-11 – Banco de dados de aparelhos de apoio. ....	86
Figura 5-12 – Propriedades dos aparelhos de apoio. ....	87
Figura 5-13 – Propriedades dos aparelhos de apoio. ....	88
Figura 5-14 – Propriedades dos aparelhos de apoio. ....	88
Figura 5-15 – Propriedades dos aparelhos de apoio. ....	89
Figura 5-16 – Propriedades dos aparelhos de apoio. ....	90
Figura 6-1 – Tela principal do SecLab. ....	91
Figura 6-2 – Discretização em camadas de uma seção de longarina da ponte sobre o Rio Praqueú. ....	92
Figura 6-3 – Interface de parâmetros do diagrama momento <i>versus</i> curvatura. ...	93
Figura 6-4 – Diagrama momento x curvatura da seção da longarina engastada no encontro da ponte sobre o Rio Praqueú. ....	93
Figura 6-5 – Diagrama de interação da seção da ligação entre a longarina e o encontro da ponte sobre o Rio Praqueú. ....	94
Figura 6-6 – Parâmetros para a geração do diagrama de interação e visualização do histórico de carregamento da seção. ....	95
Figura 6-7 – Superfície de interação da seção da ligação entre a longarina e o encontro da ponte sobre o Rio Praqueú. ....	96
Figura 6-8 – Isocurvas de esforço normal. ....	96
Figura 6-9 – Isocurvas de momento fletor na direção x. ....	97
Figura 6-10 – Isocurvas de momento fletor na direção y. ....	97
Figura 6-11 – Parâmetros para determinação do histórico de deformações e tensões. ....	98
Figura 6-12 – Parâmetros para determinação da vida útil à fadiga. ....	99
Figura 6-13 – Parâmetros para determinação do limite de abertura de fissuras. ....	100
Figura 7-1 – Definição da estrutura no programa SAP2000. ....	102
Figura 7-2 – Geometria da seção transversal no programa SAP2000. ....	103

Figura 7-3 – Propriedades do material no programa SAP2000. ....	103
Figura 7-4 – Definição da estrutura no <i>BridgeLab</i> . ....	104
Figura 7-5 – Geometria da seção transversal no programa <i>BridgeLab</i> .....	105
Figura 7-6 – Propriedades do material no programa <i>BridgeLab</i> .....	105
Figura 7-7 – Diagrama de momentos fletores no SAP2000. ....	106
Figura 7-8 – Diagrama de esforço cortante no SAP2000. ....	107
Figura 7-9 – Diagrama de momentos fletores no <i>BridgeLab</i> .....	108
Figura 7-10 – Diagrama de esforço cortante no <i>BridgeLab</i> .....	108

## **Lista de Tabelas.**

Tabela 1 – Cargas e dimensões dos trens-tipos brasileiros.....	12
Tabela 2 – Cargas e dimensões dos trens-tipos brasileiros.....	73
Tabela 3 – Comparação dos resultados de deslocamentos nos dois programas.	106

## Lista de abreviatura, siglas e símbolos.

$u_0(x)$	Deslocamento em y do eixo de referência da seção.
$v_0(x)$	Deslocamento em y do eixo de referência da seção.
$w_0(x)$	Deslocamento em z do eixo de referência da seção.
$\theta_x(x)$	Rotação da seção em torno do eixo x.
$\theta_y(x)$	Rotação da seção em torno do eixo y.
$\theta_z(x)$	Rotação da seção em torno do eixo z.
$u(x, y, z)$	Deslocamento em x de um ponto qualquer da seção.
$v(x, y, z)$	Deslocamento em y de um ponto qualquer da seção.
$w(x, y, z)$	Deslocamento em z de um ponto qualquer da seção.
$U(x, y, z)$	Campo de Deslocamentos da seção.
$\varepsilon_{xx}(x, y, z)$	Deformação normal em x de um ponto qualquer da seção.
$\varepsilon_{yy}(x, y, z)$	Deformação normal em y de um ponto qualquer da seção.
$\varepsilon_{zz}(x, y, z)$	Deformação normal em z de um ponto qualquer da seção.
$\gamma_{xy}(x, y, z)$	Deformação cisalhante no plano xy de um ponto qualquer da seção.
$\gamma_{yz}(x, y, z)$	Deformação cisalhante no plano yz de um ponto qualquer da seção.
$\gamma_{zx}(x, y, z)$	Deformação cisalhante no plano zx de um ponto qualquer da seção.
$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$	Deformações generalizadas da seção.
$\varepsilon_0(x)$	Deformação normal no eixo de referência da seção.
$\gamma_{0,xy}(x)$	Deformação cisalhante no plano xy no eixo de referência da seção.
$\gamma_{0,yz}(x)$	Deformação cisalhante no plano yz no eixo de referência da seção.
$\gamma_{0,zx}(x)$	Deformação cisalhante no plano zx no eixo de referência da seção.

$\phi_x(x)$	Curvatura da seção em torno do eixo x.
$\phi_y(x)$	Curvatura da seção em torno do eixo y.
$\phi_z(x)$	Curvatura da seção em torno do eixo z.
$e(x)$	Vetor de deformações generalizadas da seção.
$u(x)$	Vetor de deslocamentos do eixo de referência da seção.
$\nabla$	Matriz de operadores diferenciais.
$q_x(x), q_y(x), q_z(x)$	Cargas distribuídas ao longo do elemento.
$\delta q_x(x), \delta q_y(x), \delta q_z(x)$	Cargas distribuídas virtuais ao longo do elemento.
$m_x(x)$	Momentos distribuídos ao longo do elemento.
$\delta m_x(x)$	Momentos distribuídos virtual ao longo do elemento.
$\Delta x$	Comprimento de um trecho de elemento.
$N(x)$	Esforço normal de uma seção qualquer.
$Q_y(x)$	Esforço cortante na direção y de uma seção qualquer.
$Q_z(x)$	Esforço cortante na direção z de uma seção qualquer.
$M_x(x)$	Momento torsor em torno do eixo x de uma seção qualquer.
$M_y(x)$	Momento fletor em torno do eixo y de uma seção qualquer.
$M_z(x)$	Momento fletor em torno do eixo z de uma seção qualquer.
$\delta N(x)$	Esforço normal virtual de uma seção qualquer.
$\delta Q_y(x)$	Esforço cortante virtual na direção y de uma seção qualquer.
$\delta Q_z(x)$	Esforço cortante virtual na direção z de uma seção qualquer.
$\delta M_x(x)$	Momento torsor virtual em torno do eixo x de uma seção qualquer.
$\delta M_y(x)$	Momento fletor virtual em torno do eixo y de uma seção qualquer.
$\delta M_z(x)$	Momento fletor virtual em torno do eixo z de uma seção qualquer.

$\sigma_{xx}(x, y, z)$	Tensão normal na direção x de um ponto qualquer da seção.
$\sigma_{yy}(x, y, z)$	Tensão normal na direção y de um ponto qualquer da seção.
$\sigma_{zz}(x, y, z)$	Tensão normal na direção z de um ponto qualquer da seção.
$\sigma_{xy}(x, y, z)$	Tensão cisalhante no plano xy.
$\sigma_{yz}(x, y, z)$	Tensão cisalhante no plano yz.
$\sigma_{zx}(x, y, z)$	Tensão cisalhante no plano zx.
$\sigma(x, y, z)$	Vetor de tensões num ponto qualquer da seção.
$C$	Matriz constitutiva da seção.
$L$	Comprimento do elemento.
$d_1^B, d_2^B, d_3^B, d_4^B, d_5^B, d_6^B$	Deslocamentos no sistema de coordenadas básico do elemento.
$d_1^L, d_2^L, d_3^L, d_4^L, d_5^L, d_6^L$	Deslocamentos no sistema de coordenadas básico do elemento.
$p_1^B, p_2^B, p_3^B, p_4^B, p_5^B, p_6^B$	Cargas virtuais no sistema de coordenadas básico do elemento.
$\delta p_1^B, \delta p_2^B, \delta p_3^B, \delta p_4^B, \delta p_5^B, \delta p_6^B$	Cargas virtuais no sistema de coordenadas básico do elemento.
$p_1^L, p_2^L, p_3^L, p_4^L, p_5^L, p_6^L$	Cargas virtuais no sistema de coordenadas local do elemento.
$\delta p_1^L, \delta p_2^L, \delta p_3^L, \delta p_4^L, \delta p_5^L, \delta p_6^L$	Cargas virtuais no sistema de coordenadas local do elemento.
$\mathbf{S}(x)$	Vetor de esforços da seção.
$\delta \mathbf{S}(x)$	Vetor de esforços virtuais da seção.
$\mathbf{d}^B$	Vetor de deslocamentos no sistema básico.
$\mathbf{d}^L$	Vetor de deslocamentos no sistema local.

$\mathbf{p}^B$	Vetor de cargas no sistema básico.
$\mathbf{p}^L$	Vetor de cargas no sistema local.
$\delta\mathbf{p}^B$	Vetor de cargas virtuais no sistema básico.
$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$	Constantes de integração.
$\mathbf{b}(x)$	Matriz de funções interpoladoras de forças.
$A(x)$	Área da seção.
$S_y(x)$	Momento estático da seção em torno do eixo y.
$S_z(x)$	Momento estático da seção em torno do eixo z.
$J(x)$	Momento de inércia de torsão da seção em torno do eixo x.
$I_y(x)$	Momento de inércia da seção em torno do eixo y.
$I_z(x)$	Momento de inércia da seção em torno do eixo z.
$k_y$	Fator que relaciona a área da seção com a área de cisalhamento na direção y.
$k_z$	Fator que relaciona a área da seção com a área de cisalhamento na direção z.
$\mathbf{k}_s(x)$	Matriz de rigidez da seção.
$\mathbf{k}^B$	Matriz de rigidez do elemento no sistema básico de coordenadas.
$\mathbf{k}^L$	Matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas.
$\mathbf{f}_s(x)$	Matriz de flexibilidade da seção.
$\mathbf{f}^B$	Matriz de flexibilidade do elemento no sistema básico de coordenadas.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal.
$G$	Módulo de elasticidade transversal.

<b>T</b>	Matriz de transformação de coordenadas do sistema local para o sistema básico.
<b><math>\mathbf{m}_s(x)</math></b>	Matriz de massa da seção.
<b>m</b>	Matriz de massa do elemento.
<b><math>\rho</math></b>	Massa específica do material.
<b>CEB</b>	Comitê Europeu do Concreto.
<b>EFC</b>	Estrada de Ferro Carajás.
<b>UFPA</b>	Universidade Federal do Pará.
<b>NB</b>	Normas Brasileiras.
<b>NBR</b>	Normas Brasileiras.
<b>TB</b>	Trem Brasileiro.

# CAPÍTULO 1

## Apresentação

---

### 1.1 INTRODUÇÃO

De acordo com Pfeil (1990), as pontes são estruturas que possibilitam o transporte de pessoas, cargas, automóveis e comboios de um ponto a outro transpondo obstáculos, que podem ser vales, lagos, rios ou até mesmo mar.

Porém, as pontes não possuem caráter meramente estrutural, pois têm um significado social e econômico ligando duas regiões, países ou continentes. Devido a esse papel de extrema importância, essas estruturas acabam sendo muito solicitadas pelo tráfego de pessoas e veículos.

Essas solicitações chegam próximo dos limites da estrutura algumas vezes causando danos. Em certos casos é possível realizar o reparo e ou reforço, mas nem sempre os danos são identificados a tempo, levando a estrutura ao colapso.

A Companhia Vale do Rio Doce, uma das maiores mineradoras do mundo possui uma estrada de ferro ligando a Serra dos Carajás no estado do Pará ao Terminal Marítimo de Ponta da Madeira na cidade de São Luis no estado do Maranhão, utilizada no escoamento de minério, transporte de cargas diversas, combustível e pessoas.

Ao longo dos anos a carga nos vagões que transportam minério de ferro aumentou significativamente, passando de 20 toneladas por eixos para 32,5 e atualmente estuda-se a possibilidade de passar para 40 toneladas por eixo.

A Estrada de Ferro Carajás – EFC possui 54 pontes na sua extensão, com diversos sistemas estruturais, tipo de material e dimensões. Com o passar dos anos, a ação das intempéries e o uso contínuo causaram danos a essas estruturas que em alguns casos foram reforçadas e um caso em particular, estuda-se a necessidade de substituição da estrutura. Os principais danos encontrados são devido à fissuração das peças em concreto armado, corrosão de estruturas metálicas, e danos por fadiga devido ao carregamento cíclico dos trens.

Diante da necessidade de aumentar a quantidade de minério transportada e dos danos já existentes em certas estruturas, a companhia Vale do Rio Doce estabeleceu um convênio para execução de um projeto de pesquisa com a Universidade Federal do Pará – UFPA para o monitoramento de integridade estrutural das pontes e viadutos da EFC.

Este projeto tem como metodologia a análise experimental e numérica das pontes e viadutos da EFC. A análise experimental se dá através de expedições a campo para o monitoramento de vibrações e deformações com a utilização de sensores, acelerômetros e extensômetros. A análise numérica se dá através da utilização de programas de análise e verificação estrutural.

Entre as atividades realizadas neste projeto uma delas é a utilização de software comercial para a análise estrutural das pontes estudadas.

Este software além do elevado custo de aquisição, durante o uso do mesmo foram encontradas algumas dificuldades como a definição dos trens-tipos, pois o banco de dados de veículos disponível neste programa é basicamente formado por veículos americanos e no projeto são usados veículos tipo brasileiros.

Outro problema é que o mesmo realiza a verificação dos elementos de acordo com normas internacionais e no projeto são utilizadas na maioria das vezes normas brasileiras.

Devido a essas dificuldades é necessária a utilização de outros programas complementares. Na maioria das vezes são utilizados de dois a três programas diferentes com metodologias diferentes, possibilitando a ocorrência de erros nos dados de entrada.

Assim, para resolver esse tipo problema surgiu a motivação de criar um programa que fosse capaz de analisar e verificar uma estrutura num mesmo ambiente, retirando a participação do usuário na transferência dos dados entre um programa e outro. E que gerasse os trens-tipos automaticamente baseado nos veículos criados pelo usuário.

Dispondo também de uma interface gráfica que facilitasse a entrada de dados e a visualização dos resultados e verificação dos elementos estruturais numa só estrutura.

## 1.2 OBJETIVOS

O Objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de análise estrutural e verificação de pontes que utilize elementos finitos do tipo “Frame” ou “Barra” para a modelagem, que gere o carregamento móvel de trens-tipos ferroviários e que verifique os elementos estruturais de acordo com as respectivas normas.

Os objetivos específicos do trabalho são:

A formulação de um elemento finito de pórtico espacial baseado na teoria de vigas de Timoshenko.

A utilização desse elemento finito na análise estática, pseudo-estática, modal e dinâmica.

A verificação dos elementos estruturais de acordo com as normas brasileiras específicas para cada material.

A verificação dos danos por fadiga causados pelo carregamento móvel e determinação da vida útil da estrutura.

O desenvolvimento de uma interface gráfica para pré e pós-processamento dos dados fornecidos pelo usuário.

## 1.3 METODOLOGIA

A metodologia do trabalho consiste em descrever matematicamente a formulação do elemento de barra. Primeiramente para o caso plano, mais simples, e posteriormente para o caso espacial. Ambas as formulações baseiam-se na Teoria de Viga de Timoshenko.

A escolha da Teoria de Viga de Timoshenko foi devido ao fato desta considerar distorções por cisalhamento, enquanto que a Teoria de Viga Euler-Bernoulli não considera essas deformações.

As formulações dos elementos são feitas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, utilizando o método das forças. A escolha do método das forças se deu por

resolver problemas de elementos com seção variável, que são bastante comuns nas estruturas estudadas, de forma simples e exata para problemas estáticos.

Após a formulação do elemento de pórtico espacial é realizado a implementação deste elemento finito e o desenvolvimento de uma interface gráfica, utilizando a plataforma MATLAB®, para pré e pós-processamento.

O desenvolvimento da interface gráfica assim como os algoritmos de análise serão implementados na plataforma MATLAB®, utilizando os recursos de interface gráfica disponíveis no programa.

Os procedimentos de verificação dos elementos estruturais em concreto armado serão feitos de acordo com a NBR – 6118/2003 – Projetos de Estruturas de Concreto.

A análise de vida a fadiga do concreto além da NBR – 6118/2003 utiliza também ao CEB 90, já que a NBR – 6118/2003 baseia-se somente no processo simplificado descrito no CEB 90 que possui outros métodos mais sofisticados como a contagem de ciclos de variação de tensão bem mais precisa que o processo simplificado utilizado pela NBR – 6118/2003.

## **1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

As pontes geralmente são estruturas utilizadas para transpor obstáculos, sejam estes obstáculos naturais como rios, vales, lagos, e mares, ou outras vias.

Segundo Pfeil (1990), as pontes, em sua maioria, sob o ponto de vista funcional, podem ser divididas em três partes principais: superestrutura, mesoestrutura e infraestrutura.

A superestrutura, composta geralmente de lajes, vigas principais e secundárias, é o elemento de suporte imediato do estrado, que constitui a parte útil da obra sob o ponto de vista de sua finalidade.

A mesoestrutura é constituída pelos pilares, é o elemento que recebe os esforços da superestrutura e os transmite a infraestrutura, em conjunto com os esforços recebidos diretamente de outras forças solicitantes da ponte, tais como pressões do vento e da água em movimento.

A infraestrutura, ou fundação, é a parte por meio da qual são transmitidos ao terreno de implantação, rochas ou solo, os esforços recebidos da mesoestrutura. Constituem a infraestrutura os blocos, as sapatas, as estacas, os tubulões, os blocos de coroamento etc.

Os encontros, considerados por alguns engenheiros como constituintes da mesoestrutura, e por outros como fazendo parte da infraestrutura, são elementos de característica extremamente variáveis, cuja função principal é receber o empuxo dos aterros de acesso e evitar sua transmissão aos demais elementos da ponte.

Ainda de acordo com Pfeil (1990), as pontes podem ser classificadas de diversas maneiras, sendo as mais comuns quanto à finalidade, quanto ao material com que são construídas, quanto ao tipo estrutural, quanto ao tempo de utilização, quanto à fixidez ou mobilidade do estrado.

Quanto à finalidade, as pontes podem ser rodoviárias, ferroviárias, para pedestres, geralmente chamadas de passarelas etc. Podem, ainda, destinar-se ao suporte de tubulações para água, esgoto, gás, óleo, pista de aeroportos e até vias navegáveis (ponte canal).

Quanto ao material com que predominantemente são construídas, as pontes podem ser de madeira, de pedra, de concreto armado, concreto protendido e metálicas (geralmente de aço e, excepcionalmente de alumínio).

Quanto ao tipo estrutural, as pontes podem ser em lajes, em vigas retas, de alma cheia, em treliça, em quadros rígidos, em arcos ou abóbadas e pênseis ou suspensas.

Existem também outras classificações que são quanto ao tempo de utilização (provisórias), quanto ao tipo de estrado (estrado móvel), etc.

As ações são classificadas de acordo com as normas NBR 6120 e NBR 8681. Nestas normas é encontrada a seguinte classificação: cargas permanentes, variáveis e excepcionais.

As cargas permanentes são provenientes do peso próprio da estrutura e de elementos que constituem a obra como no caso de pontes ferroviárias, lastro, trilhos, dormentes, guarda-corpo, etc. Além de cargas de protensão, recalques e retração dos materiais.

As cargas acidentais são cargas decorrentes do uso da estrutura, tais como passagem de veículos e pessoas sobre a mesma.

Segundo Pfeil (1990), as cargas móveis de cálculo para pontes rodoviárias não descrevem as cargas reais que circulam nas estradas brasileiras, pois a norma brasileira que especifica estas cargas é baseada nas normas alemãs que utilizam veículos de dimensões especiais, enquanto que nas estradas brasileiras circulam caminhões e carretas com dimensões e pesos fixados em uma regulamentação denominada Lei da Balança. Excepcionalmente, circulam pelas estradas carretas especiais para transporte de peças de usinas hidroelétricas e nucleares.

De acordo com a NBR 7189 as cargas acidentais (móveis) para pontes ferroviárias são definidas como trens-tipos brasileiros (TB). Esses trens são compostos por cargas concentradas que representam as locomotivas e por carga distribuída que representa os vagões.

Na NBR 7189 estão descritos os trens descritos na Tabela 1:

**Tabela 1 – Cargas e dimensões dos trens-tipos brasileiros.**

TB	Q (Kn)	q(kN/m)	q'(kN/m)	a(m)	b(m)	C(m)
360	360	120	20	1,00	2,00	2,00
270	270	90	15	1,00	2,00	2,00
240	240	80	15	1,00	2,00	2,00
170	170	25	15	11,00	2,50	5,00

Além desses veículos é utilizado outro no dimensionamento de pontes ferroviárias, que é o Cooper E-80, que possui cargas 11% superiores ao TB-32. Este veículo foi utilizado no dimensionamento das pontes da EFC

Uma parte importante do projeto de pontes rodoviárias ou ferroviárias são os aparelhos de apoio. Os aparelhos de apoio são peças de transição entre o viga principal e os pilares ou encontros. Servindo para transmitir as reações de apoio, permitindo também a movimentação das vigas.

Existem basicamente três tipos de aparelhos de apoio, fixos, móveis e de elastômero.

Os aparelhos fixos permitem rotações, mas não permitem translações e podem ser de concreto ou aço.

Os aparelhos móveis permitem movimentos de rotação e translação e também podem ser de concreto ou aço.

Os aparelhos elastoméricos são constituídos por lâminas de material elástico, denominados elastômeros, de grande durabilidade. O mais conhecido é o neoprene ou borracha sintética (polipropileno). As lâminas de elastômero são intercaladas com lâminas de aço para melhor o comportamento a cargas axiais, neste caso denominado de neoprene fretado. Este tipo de aparelhos também permite movimentos de rotação e translação.

## 1.5 CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação o conteúdo foi agrupado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, apresentam-se uma introdução, os objetivos e a metodologia.

No segundo capítulo é feita uma síntese sobre o método dos elementos finitos, os principais tipos de elementos e as deduções matemáticas dos elementos finitos de pórtico plano e espacial, ambos com base na teoria de viga de Timoshenko e através do princípio das forças virtuais.

No terceiro capítulo mostra-se como são fundamentadas as análises realizadas pelo programa.

No quarto capítulo é feito um estudo das normas técnicas brasileiras que regulamentam os assuntos abordados no trabalho.

No quinto capítulo é feita uma descrição do programa, mostrando as classes criadas e as janelas de interface com suas funções.

No sexto capítulo são tratados os processos de verificação das seções de concreto armado e também são descritas as janelas da interface do programa *SecLab* que realiza a verificação das seções.

No sétimo capítulo são apresentados os resultados obtidos com o programa desenvolvido e comparações feitas com outros programas para validar os resultados.

No oitavo capítulo são colocadas as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho assim como sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### Formulação do Elemento

---

Segundo Cook (1989), o método dos elementos finitos é um procedimento numérico de análise de estruturas e de meios contínuos. Comumente, os problemas são muito complicados para serem resolvidos facilmente por métodos analíticos clássicos.

O método dos elementos finitos conduz a equações algébricas que podem ser resolvidas em um computador digital. Os resultados raramente são exatos. Entretanto, os erros são diminuídos à medida que o número de equações algébricas aumenta, e resultados bastante precisos são obtidos com um custo computacional razoável.

Existem vários tipos de elementos finitos, entre eles os elementos do tipo barra ou reticulado, do tipo área e do tipo sólido. Entretanto, como o elemento que será utilizado será do tipo barra, não serão mencionados outros tipos de elementos no decorrer do trabalho.

As deduções matemáticas de elementos do tipo barra se baseiam em teorias de viga. As mais usuais são: a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. A principal diferença entre as duas está na consideração das deformações por cisalhamento, onde a teoria de Timoshenko considera essas deformações e a de Euler-Bernoulli não as considera. Assim, o cisalhamento na teoria de Timoshenko já é considerado na formulação do elemento e na teoria de Bernoulli é obtido por meio do equilíbrio do elemento.

Na teoria de Euler-Bernoulli as seções permanecem planas e perpendiculares em relação ao eixo de referência do elemento. Já na teoria de Timoshenko, as seções permanecem planas, mas não mais perpendiculares ao eixo de referência. Isso será discutido com mais detalhes ao longo do trabalho. A fim de obter melhores resultados optou-se por usar a teoria de viga de Timoshenko.

Ainda falando sobre elementos do tipo barra, têm-se elementos que trabalham no plano, quais sejam pórtico e treliça plana, e no espaço, quais sejam pórtico e treliça espacial. Os elementos de treliça são submetidos somente a forças axiais, e os elementos de pórtico são submetidos a forças axiais, transversais e momentos.

As análises realizadas baseiam-se no método da rigidez direta para a resolução do sistema de equações, e o elemento finito utilizado é um elemento de pórtico espacial.

Este elemento finito é do tipo barra e possui dois nós que o definem. Cada nó deste elemento possui seis graus de liberdade, sendo três de translação e três de rotação, a Figura 2-1 ilustra o elemento, os nós e seus graus de liberdade.

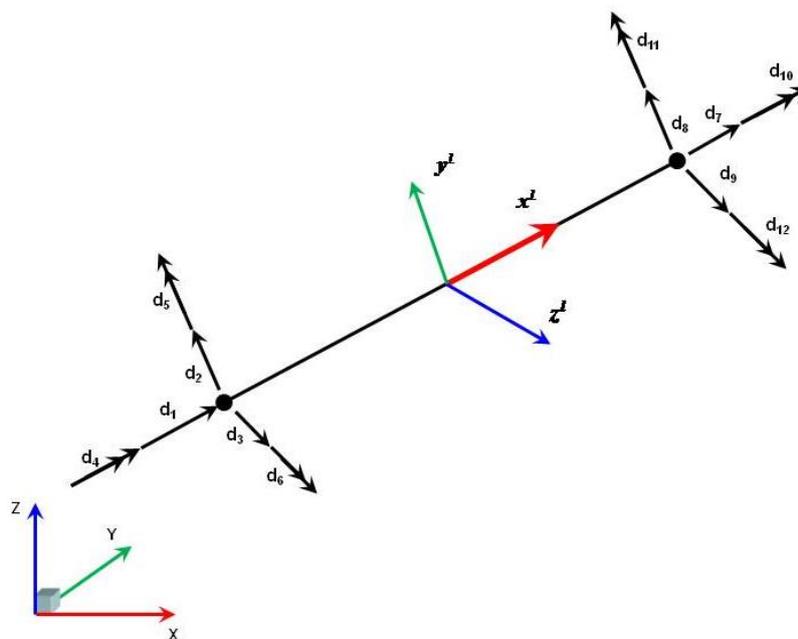


Figura 2-1 – Elemento finito de pórtico espacial

A formulação matemática deste elemento, a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas equivalentes baseia-se na teoria de viga de Timoshenko.

Primeiramente a formulação do elemento será feita considerando o caso plano, de pórtico plano, e em seguida será estendida para o caso espacial, de pórtico espacial.

## 2.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

### 2.1.1 Campo de Deslocamentos

Primeiramente é necessário determinar as equações que descrevem o campo de deslocamentos do elemento.

Por se tratar de um elemento de barra, que é definido por um eixo de referência, o campo de deslocamentos do elemento é calculado através dos deslocamentos de cada seção no eixo de referência.

A obtenção do campo de deslocamento é feita a partir de deslocamentos arbitrários impostos ao elemento, chegando a equações que descrevem o deslocamento de qualquer ponto do elemento a partir dos deslocamentos no eixo de referência. A Figura 2-2 ilustra os deslocamentos impostos e o campo de deslocamentos.

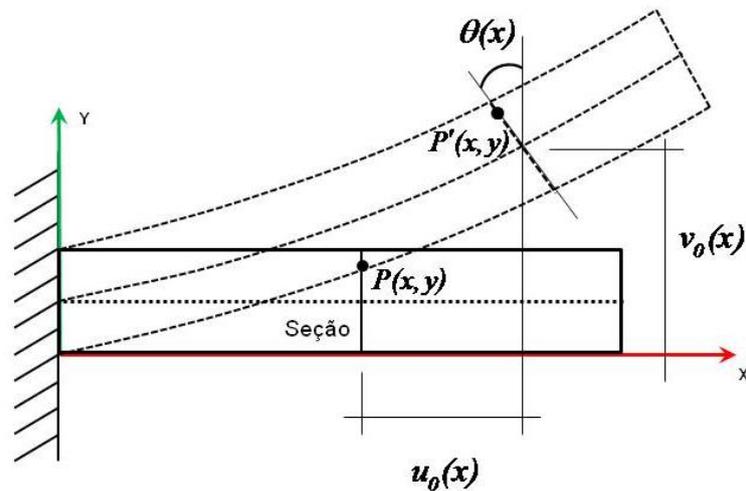


Figura 2-2 – Configuração deformada de um elemento de pórtico plano.

Para a Teoria de Viga de Timoshenko o ângulo  $\theta(x)$ , ângulo de rotação da seção, não coincide com o ângulo de rotação do eixo de referência. Assim  $\theta(x)$  não pode ser dado como a derivada dos deslocamentos verticais em relação a  $x$ , como na teoria de Euler-Bernoulli.

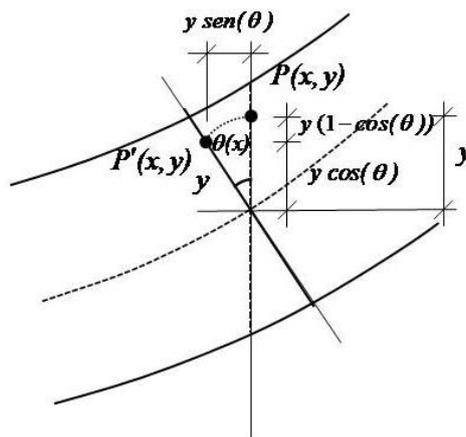


Figura 2-3 – Campo de deslocamentos de uma seção.

Logo, o campo de deslocamentos é dado pelas seguintes equações:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \operatorname{sen}(\theta(x)) \quad (2.1)$$

$$v(x, y) = v_0(x) - y(1 - \cos \theta(x)) \quad (2.2)$$

Ao considerar pequenas rotações fazem-se as seguintes simplificações matemáticas:  $\text{sen}(\theta) \cong \theta$  e  $\text{cos}(\theta) \cong 1$ . Assim, substituindo estas simplificações nas equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \theta(x) \quad (2.3)$$

$$v(x, y) = v_0(x) \quad (2.4)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x) - y \theta(x) \\ v_0(x) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Equações de Compatibilidade

De acordo com os conceitos da teoria da elasticidade obtém-se as seguintes relações entre deslocamentos e deformações:

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.8)$$

Os modos de deformação correspondentes podem ser visualizados como mostra a Figura 2-4.

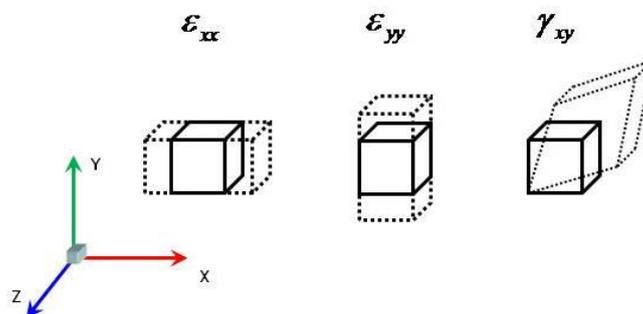


Figura 2-4 – Visualização dos modos de deformação de um elemento infinitesimal.

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

De posse do campo de deslocamento e com base nas relações da teoria da elasticidade, determinam-se os campos de deformações.

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y \theta(x))}{\partial x} = u'_0(x) - y \theta'(x) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial y} - \frac{\partial(y \theta(x))}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = v'_0(x) - \theta(x) \quad (2.12)$$

Nestas relações entra em questão a diferença entre as duas teorias de vigas mais conhecidas, a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko.

A teoria de viga de Bernoulli considera que a seção permanece sempre perpendicular ao eixo de referência da seção. Considerando pequenos deslocamentos, obtém-se a seguinte expressão:

$$\tan \theta(x) \cong \theta(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} = v'_0(x) \quad (2.13)$$

Assim, tem-se o campo de deslocamentos para a teoria de viga de Euler-Bernoulli:

$$u(x, y) = u_0(x) - y v'_0(x) \quad (2.14)$$

$$v(x, y) = v_0(x) \quad (2.15)$$

A partir do campo de deslocamentos, obtém-se o campo de deformações para um ponto qualquer do elemento para esta teoria de viga:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y v_0'(x))}{\partial x} \\ &= u_0'(x) - y v_0''(x)\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial y} - \frac{\partial(y \theta(x))}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \\ &= v_0'(x) - v_0'(x) = 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

Onde se percebe que a teoria de viga de Euller-Bernoulli considera que as deformações por cisalhamento são nulas, equação (2.18).

Voltando para a teoria de viga de Timoshenko, com base nas equações (2.10) a (2.12) defini-se as deformações generalizadas da seção:

$$\varepsilon_0(x) = u_0'(x) \quad (2.19)$$

$$\gamma_{xy}(x) = v_0'(x) - \theta(x) \quad (2.20)$$

$$\phi(x) = \theta'(x) \quad (2.21)$$

Onde

$\phi(x)$  é a curvatura da seção, que por definição é a derivada do ângulo de giro da seção.

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \gamma_{xy}(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \therefore \mathbf{e}(x) = \nabla \mathbf{u}(x) \quad (2.22)$$

Assim, chega-se às equações diferenciais de compatibilidade de acordo com a teoria de viga Timoshenko:

$$\begin{cases} \varepsilon_0(x) - u_0'(x) = 0 \\ \gamma_{xy}(x) - v_0'(x) + \theta(x) = 0 \\ \phi(x) - \theta'(x) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

### 2.1.3 Equações de Equilíbrio

A seguir são descritas as equações de equilíbrio para o elemento proposto. Para isso considera-se um elemento estrutural submetido a carregamentos distribuídos  $q^x$  e  $q^y$  ao longo de seu comprimento nas direções de seus eixos de referência,  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Desta forma, é imposta a condição de equilíbrio nos dois eixos e em torno do eixo  $z$  (equilíbrio de momentos em torno do eixo  $z$ ).

Para isso é tomado um trecho pequeno do elemento de comprimento  $\Delta x$  e impõe-se o equilíbrio do mesmo, como ilustrado na Figura 2-5.

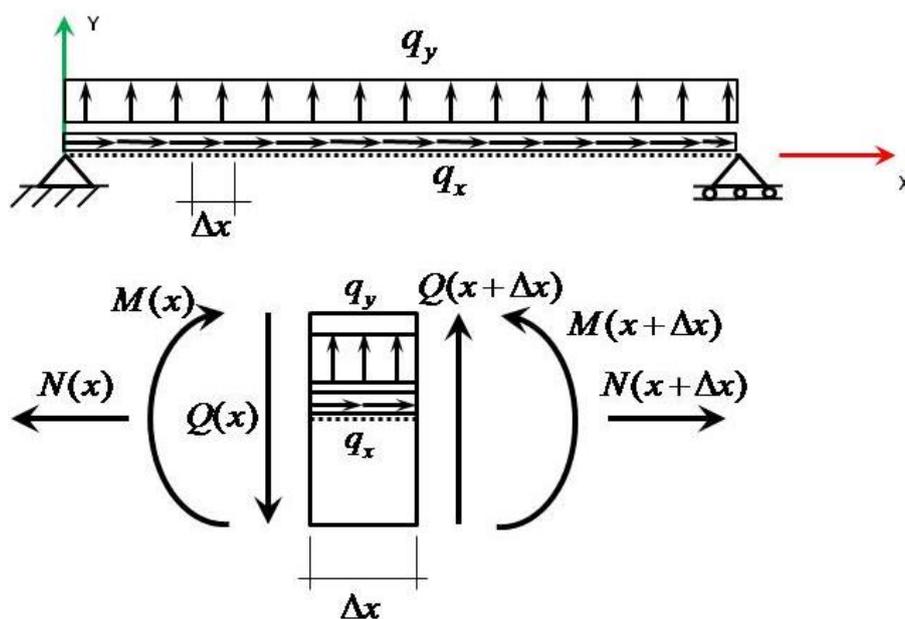


Figura 2-5 – Elemento com cargas distribuídas e equilíbrio de um corpo infinitesimal.

Impondo-se equilíbrio do elemento na direção  $x$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 N(x + \Delta x) + q_x(x)\Delta x - N(x) &= 0 \\
 \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q_x(x) &= 0 \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q_x(x) \right) &= 0 \\
 \frac{dN(x)}{dx} + q_x(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Impondo-se equilíbrio do elemento na direção y, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Q(x + \Delta x) + q_y(x)\Delta x - Q(x) &= 0 \\
 \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} + q_y(x) &= 0 \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} + q_y(x) \right) &= 0 \\
 \frac{dQ(x)}{dx} + q_y(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Impondo-se equilíbrio do elemento para os momentos atuantes em torno do eixo z, tem-se:

$$\begin{aligned}
 M(x + \Delta x) - M(x) + Q(x + \Delta x)\Delta x + \frac{q_y(x)\Delta x^2}{2} &= 0 \\
 \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} + Q(x + \Delta x) + \frac{q_y(x)\Delta x}{2} &= 0 \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} + Q(x + \Delta x) + \frac{q_y(x)\Delta x}{2} \right) &= 0 \\
 \frac{dM(x)}{dx} + Q(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, as equações de equilíbrio considerando a teoria de viga de Timoshenko, são:

$$\begin{cases}
 N'(x) + q_x = 0 \\
 Q'(x) + q_y = 0 \\
 M'(x) + Q(x) = 0
 \end{cases} \tag{2.27}$$

#### 2.1.4 Equações Constitutivas

A seguir serão descritas as relações constitutivas do material do elemento. Essas leis se baseiam em modelos de comportamento dos materiais. Elas são a forma como se relacionam as tensões e deformações no material e existem vários modelos idealizados para descrever essa relação.

Os modelos de materiais podem ser definidos como: Elásticos, Plásticos, Viscoelásticos, Viscopásticos e outros. O modelo elástico caracteriza materiais cuja

trajetória de descarga é a mesma trajetória de carga e por consequência disto o material sempre retorna a seu estado original sem acúmulo de tensões ou deformações.

Os materiais elásticos podem ser classificados de duas maneiras, lineares ou não-lineares. Nos materiais lineares a relação tensão deformação é uma reta e a tangente dessa reta que é a mesma para qualquer ponto define o módulo de elasticidade do material.

Nos materiais elásticos não-lineares a relação tensão deformação não é mais uma reta e sim uma curva, assim, a tangente da curva muda de acordo com o ponto. Então, o módulo de elasticidade desses materiais depende do estado de carregamento.

Neste trabalho, todas as deduções a seguir seguiram o modelo de cálculo de materiais elásticos lineares. Os materiais elásticos lineares são aqueles que seguem a Lei de Hooke, onde as tensões são proporcionais às deformações.

Para vigas, onde são consideradas somente as deformações no eixo das vigas, já que a seção transversal não se deforma, a relação constitutiva pode ser simplificada como mostrado nas (2.28) a (2.30).

$$\sigma_{xx}(x, y) = E\varepsilon_{xx}(x, y) \quad (2.28)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0 \quad (2.29)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = G\gamma_{xy}(x, y) \quad (2.30)$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \therefore \sigma(x, y) = C\varepsilon(x, y) \quad (2.31)$$

### 2.1.5 Matriz de Rigidez do Elemento

Segundo Pereira (2002), o método das forças, na forma fraca, parte das equações diferenciais de compatibilidade e do campo de esforços virtuais, para se provar o princípio das forças virtuais. Em seguida, determina-se a relação entre o campo de deformações e o campo de esforços, a partir do princípio do trabalho virtual e das equações constitutivas. Depois, determina-se a relação entre o campo de esforços e o vetor de forças nodais, diretamente a partir de funções de interpolação de forças. Utilizando-se o princípio do trabalho virtual, determina-se a relação entre o vetor de

deslocamentos nodais e o vetor de forças nodais, que é a matriz de flexibilidade do elemento. Finalmente, invertendo-se a matriz de flexibilidade do elemento tem-se a matriz de rigidez do elemento.

Durante a resolução das equações diferenciais de equilíbrio, para determinarmos as funções de interpolações de força, surgirão apenas três constantes de integração. Assim, para se determinar as três constantes são necessárias somente três condições de contorno. Devido a isso se adotará um novo sistema de coordenadas que será denominado sistema básico no qual só existem três condições de contorno. Este sistema é ilustrado na Figura 2-6.

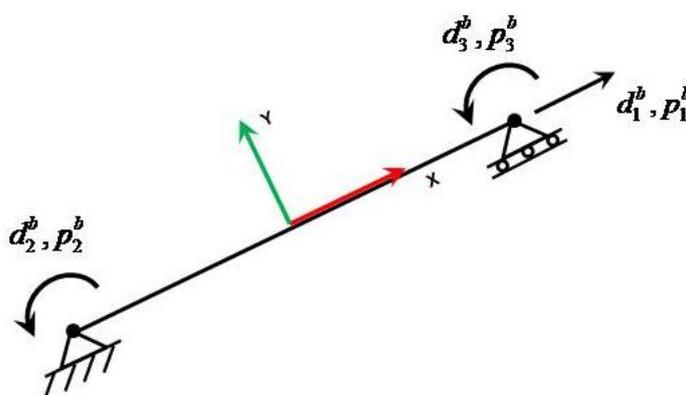


Figura 2-6 – Sistema Básico de Coordenadas.

### 2.1.6 Princípio das Forças Virtuais

O princípio das forças virtuais é deduzido através das equações diferenciais de compatibilidade, equação (2.23), na forma fraca, chegando à seguinte expressão:

$$\int_0^L [(\varepsilon_0(x) - u'_0(x)) \delta N(x) + (\phi(x) - \theta'(x)) \delta M(x) + (\gamma_{xy}(x) - v'_0(x) + \theta(x)) \delta Q(x)] dx = 0 \quad (2.32)$$

A expressão acima é a forma fraca das equações de compatibilidade, e esta expressão só resulta na forma forte das equações compatibilidade se as forças aplicadas na equação forem completamente arbitrárias.

Desenvolvendo a equação (2.32), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \varepsilon_0(x) \delta N(x) dx - \int_0^L u'_0(x) \delta N(x) dx + \int_0^L \phi(x) \delta M(x) dx - \int_0^L \theta'(x) \delta M(x) dx + \\
& + \int_0^L \gamma_{xy}(x) \delta Q(x) dx - \int_0^L v'_0(x) \delta Q(x) dx + \int_0^L \theta(x) \delta Q(x) dx = 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Empregando a integração por partes tem-se:

$$\int_0^L u'_0(x) \delta N(x) dx = u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L - \int_0^L u_0(x) \delta N'(x) dx \tag{2.34}$$

$$\int_0^L \theta'(x) \delta M(x) dx = \theta(x) \delta M(x) \Big|_0^L - \int_0^L \theta(x) \delta M'(x) dx \tag{2.35}$$

$$\int_0^L v'_0(x) \delta Q(x) dx = v_0(x) \delta Q(x) \Big|_0^L - \int_0^L v_0(x) \delta Q'(x) dx \tag{2.36}$$

Substituindo o resultado da integração por partes na equação original, (2.33),

tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \varepsilon_0(x) \delta N(x) dx + \int_0^L u_0(x) \delta N'(x) dx + \int_0^L \phi(x) \delta M(x) dx + \\
& + \int_0^L \theta(x) \delta M'(x) dx + \int_0^L \gamma_{xy}(x) \delta Q(x) dx + \int_0^L v_0(x) \delta Q'(x) dx + \int_0^L \theta(x) \delta Q(x) dx + \\
& - u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L - \theta(x) \delta M(x) \Big|_0^L - v_0(x) \delta Q(x) \Big|_0^L = 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

De acordo com as equações diferenciais de equilíbrio, que também valem pra forças virtuais por estarem na forma forte e serem arbitrárias e considerando os carregamentos distribuídos virtuais nulos, temos que:

$$\begin{cases} \delta N'(x) = 0 \\ \delta Q'(x) = 0 \\ \delta M'(x) + \delta Q(x) = 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \varepsilon_0(x) \delta N(x) dx + \int_0^L \phi(x) \delta M(x) dx + \int_0^L \gamma_{xy}(x) \delta Q(x) dx \\
& = u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L + \theta(x) \delta M(x) \Big|_0^L + v_0(x) \delta Q(x) \Big|_0^L
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Desenvolvendo a segunda parte da equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\varepsilon_0(x) \delta N(x) + \phi(x) \delta M(x) + \gamma_{xy}(x) \delta Q(x)) dx = \\
& = u_0(L) \delta N(L) - u_0(0) \delta N(0) + \theta(L) \delta M(L) - \theta(0) \delta M(0) + v_0(L) \delta Q(L) - v_0(0) \delta Q(0)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

De acordo com o sistema básico de coordenadas, Figura 2-6, e as condições de contorno obtidas a partir dele, escreve-se o segundo termo da equação (2.39), conforme descrito a seguir.

As condições de contorno do sistema básico são:

$$\begin{aligned}
\delta N(0) &= \delta N(L) = \delta p_1^B \\
\delta M(0) &= -\delta p_2^B \\
\delta M(L) &= \delta p_3^B
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
u_0(L) &= d_1^B & u_0(0) &= 0 \\
v_0(L) &= 0 & v_0(0) &= 0 \\
v'_0(L) &= d_3^B & v'_0(0) &= d_2^B
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Substituindo as condições de contorno na equação (2.39) tem-se:

$$\int_0^L (\varepsilon_0(x) \delta N(x) + \phi(x) \delta M(x) + \gamma_{xy}(x) \delta Q(x)) dx = d_1^B \delta p_1^B + d_3^B \delta p_3^B + d_2^B \delta p_2^B \tag{2.42}$$

Reescrevendo a equação (2.42) na forma matricial, chega-se a:

$$\int_0^L \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0(x) & \gamma_{xy}(x) & \phi(x) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta N(x) \\ \delta Q(x) \\ \delta M(x) \end{matrix} \right\} dx = \left\{ \begin{matrix} d_1^B & d_2^B & d_3^B \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta p_1^B \\ \delta p_2^B \\ \delta p_3^B \end{matrix} \right\} \tag{2.43}$$

Ou na forma compacta:

$$\int_0^L \mathbf{e}(x)^T \delta \mathbf{S}(x) dx = \mathbf{d}^{B^T} \delta \mathbf{p}^B \tag{2.44}$$

onde:

$\mathbf{e}(x)$  é o campo de deformações reais do eixo de referencia do elemento.

$\delta \mathbf{S}(x)$  é o campo de esforços internos virtuais do elemento.

$\mathbf{d}^B$  é o vetor de deslocamentos reais do sistema de coordenadas básico.

$\delta \mathbf{p}^B$  é o vetor de forças nodais virtuais no sistema de coordenadas básico.

A equação (2.44) é o princípio das forças virtuais, para um elemento de pórtico plano, descrito no sistema básico de coordenadas.

### 2.1.7 Funções Interpoladoras de Forças

Para determinar as funções interpoladoras de forças considera-se inicialmente, que as cargas distribuídas  $q_x$  e  $q_y$  são nulas, logo as equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de viga de Timoshenko ficam:

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + Q(x) = 0 \quad (2.47)$$

Integrando as equações anteriores tem-se:

$$N(x) = C_1 \quad (2.48)$$

$$Q(x) = C_2 \quad (2.49)$$

$$M(x) = x C_2 + C_3 \quad (2.50)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes de integração.

Representando as equações (2.48) a (2.50) na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Assim, como existem apenas três constantes de integração são necessárias somente três condições de contorno para determiná-las.

Através do sistema de coordenadas básico definido na Figura 2-6, pode-se obter:

$$\begin{aligned}
N(L) &= p_1^B \\
M(0) &= -p_2^B \\
M(L) &= p_3^B
\end{aligned}
\tag{2.52}$$

A partir das relações definidas na equação (2.51) e a partir das condições de contorno das equações (2.52) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N(L) \\ M(0) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^B \\ -p_2^B \\ p_3^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}
\tag{2.53}$$

Resolvendo o sistema linear expresso na equação (2.53) tem-se os valores das constantes de integração.

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \end{Bmatrix}
\tag{2.54}$$

Substituindo o valor das constantes de integração na equação (2.51) temos:

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{x}{L} - 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \end{Bmatrix}
\tag{2.55}$$

Ou mesmo:

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{p}^B
\tag{2.56}$$

Esta equação fornece o vetor de esforços internos em qualquer ponto do elemento a partir de suas forças nodais, definindo, assim, uma matriz de interpolação de esforços no sistema básico que depende somente das forças nodais.

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{x}{L} - 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

As funções de interpolação de forças obtidas aqui são exatas, não depende da variação de seção transversal e do tipo de material do elemento.

### 2.1.8 Matriz de Flexibilidade e de Rigidez da Seção

A matriz de flexibilidade da seção pode ser deduzida através da matriz de rigidez da seção, onde a matriz de flexibilidade é a inversa da matriz de rigidez.

A matriz de rigidez da seção pode ser determinada através das equações que determinam os esforços em uma seção, conforme descrito a seguir.

$$N(x) = \int_A \sigma_{xx}(x, y) dA = \int_A (E \varepsilon_0(x) - E y \phi(x)) dA = E A(x) \varepsilon_0(x) - E S(x) \phi(x)$$

$$Q(x) = \int_A \sigma_{xy}(x, y) dA = \int_A G \gamma_{xy}(x) dA = G \gamma_{xy}(x) \int_A dA = G A(x) k \gamma_{xy}(x)$$

$$M(x) = - \int_A \sigma_{xx}(x, y) y dA = - \int_A (E y \varepsilon_0(x) - E y^2 \phi(x)) dA = -E S(x) \varepsilon_0(x) + E I(x) \phi(x)$$

onde:

$$A(x) = \int_A dA \quad \text{é a área da seção transversal.}$$

$$S(x) = \int_A y dA \quad \text{é o primeiro momento estático.}$$

$$I(x) = \int_A y^2 dA \quad \text{é o segundo momento estático ou momento de inércia.}$$

$k$  é uma fator relaciona a área da seção com a área de cisalhamento.

Assim, na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E A(x) & 0 & -E S(x) \\ 0 & G A(x) k & 0 \\ -E S(x) & 0 & E I(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \gamma_{xy}(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Na forma compacta.

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{e}(x) \quad (2.59)$$

Assim, tem-se que:

$$\mathbf{f}_s(x) = \mathbf{k}_s(x)^{-1} = \begin{bmatrix} EA(x) & 0 & -ES(x) \\ 0 & GA(x)k & 0 \\ -ES(x) & 0 & EI(x) \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.60)$$

onde:

$\mathbf{f}_s(x)$  é a matriz de flexibilidade.

Uma simplificação que pode ser feita é assumir que o eixo de referência da seção coincide com o eixo do centro de gravidade. Assim, o primeiro momento de área ou momento estático,  $S(x)$  é nulo, e a equação (2.60) fica:

$$\mathbf{f}_s(x) = \begin{bmatrix} EA(x) & 0 & 0 \\ 0 & GA(x)k & 0 \\ 0 & 0 & EI(x) \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.61)$$

### 2.1.9 Matriz de Flexibilidade e Matriz de Rigidez do Elemento

Através da equação que relaciona os esforços na seção com o vetor de forças virtuais no sistema básico (2.56), tem-se:

$$\delta \mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x) \delta \mathbf{p}^B \quad (2.62)$$

De acordo com o princípio das forças virtuais, fazendo a igualdade entre o trabalho virtual interno e o trabalho virtual externo, equação (2.44), tem-se:

$$\int_0^L \mathbf{e}(x)^T \delta \mathbf{S}(x) dx = \mathbf{d}^{B^T} \delta \mathbf{p}^B \quad (2.63)$$

Substituindo a equação (2.62) na equação (2.63) tem-se:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \int_0^L \delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{b}(x)^T \mathbf{e}(x) dx \quad (2.64)$$

Como as forças nodais virtuais são constantes ao longo do elemento, então o vetor de cargas nodais no sistema básico sai da integral e a equação (2.64) fica:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{B^T} \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{e}(x) dx \quad (2.65)$$

Assim, considerando que as forças nodais virtuais são completamente arbitrárias, tem-se que:

$$\mathbf{d}^B = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{e}(x) dx \quad (2.66)$$

Substituindo a equação (2.59) na equação (2.66), tem-se que:

$$\mathbf{d}^B = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{S}(x) dx = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{b}(x) dx \mathbf{p}^B = \mathbf{f}^B(x) \mathbf{p}^B \quad (2.67)$$

onde:

$$\mathbf{f}^B(x) = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{b}(x) dx \quad (2.68)$$

é a matriz de flexibilidade do elemento no sistema básico de coordenadas.

A equação (2.68) é válida para qualquer elemento de pórtico plano.

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{f}^B(x)^{-1} \mathbf{d}^B \quad (2.69)$$

Logo:

$$\mathbf{k}^B(x) = \mathbf{f}^B(x)^{-1} \quad (2.70)$$

que é a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas básico.

Para realizar a transformação do sistema de coordenadas básico para o sistema de coordenadas local, deve-se partir do equilíbrio de forças no sistema básico, como mostra a Figura 2-7.

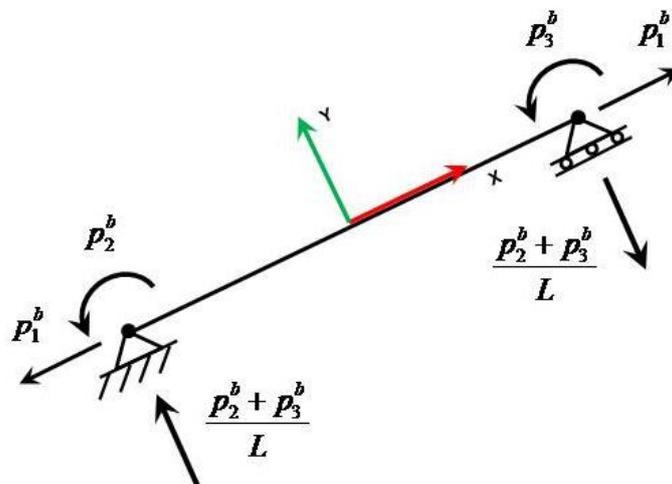


Figura 2-7 – Reações de Equilíbrio no sistema básico de coordenadas.

Agora é possível associar os esforços nodais e as reações obtidas com o equilíbrio no sistema básico com os esforços nodais do sistema local, Figura 2-8. Assim, surgem as seguintes relações:

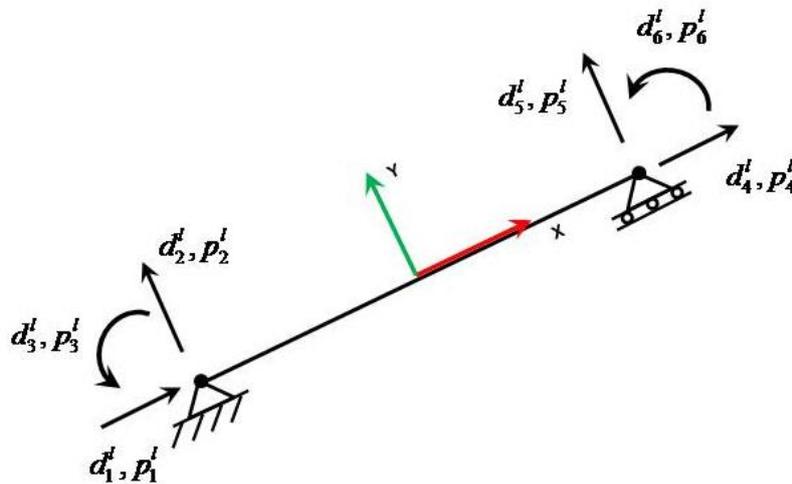


Figura 2-8 – Sistema local de coordenadas.

$$\begin{aligned}
 p_1^L &= -p_1^B & p_4^L &= p_1^B \\
 p_2^L &= \frac{(p_2^B + p_3^B)}{L} & p_5^L &= -\frac{(p_2^B + p_3^B)}{L} \\
 p_3^L &= p_2^B & p_6^L &= p_3^B
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} p_1^L \\ p_2^L \\ p_3^L \\ p_4^L \\ p_5^L \\ p_6^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \end{Bmatrix} = \mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{p}^B \tag{2.72}$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de esforços do sistema de coordenadas básico para o sistema de coordenadas local.

Considerando que o trabalho virtual externo deve ser o mesmo nos dois sistemas de coordenadas, tem-se a seguinte relação:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{L^T} \mathbf{d}^L \quad (2.73)$$

Como a equação de transformação de esforços também vale para forças virtuais, tem-se:

$$\delta \mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \delta \mathbf{p}^B \quad (2.74)$$

Substituindo a equação (2.74) na expressão (2.73), obtém-se:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.75)$$

$$\mathbf{d}^B = \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.76)$$

Isto é conhecido como princípio da contra gradiência.

A equação a seguir relaciona os esforços nodais com os deslocamentos nodais do sistema básico.

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{k}^B \mathbf{d}^B \quad (2.77)$$

Fazendo a transformação dos deslocamentos do sistema básico para o sistema local, tem-se:

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{k}^B \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.78)$$

Agora fazendo a transformação dos esforços nodais do sistema básico para o sistema local e reorganizando a equação (2.78), tem-se:

$$\mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.79)$$

Por analogia tem-se que a expressão a seguir fornece a matriz de rigidez no sistema de coordenadas locais do elemento.

$$\mathbf{k}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B \mathbf{T} \quad (2.80)$$

Pode-se observar que esta equação é exata para qualquer forma de variação de seção.

### 2.1.10 Matriz de Massa do Elemento

De acordo com Pereira (2002), a equação da matriz de massa consistente do elemento é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{m} = \int_0^L \mathbf{N}(x)^T \mathbf{m}_s \mathbf{N}(x) dx \quad (2.81)$$

Onde:

$\mathbf{m}_s$  é a matriz de massa da seção.

$\mathbf{N}(\mathbf{x})$  é a matriz de funções interpoladoras de deslocamentos.

## 2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

Com base no desenvolvimento da formulação do elemento de pórtico plano serão realizadas as deduções matemáticas da formulação do elemento de pórtico espacial, considerando a teoria de viga de Timoshenko.

### 2.2.1 Campo de Deslocamentos

Para determinar as equações do campo de deslocamentos para o caso espacial é necessário que se considere algumas hipóteses simplificadoras.

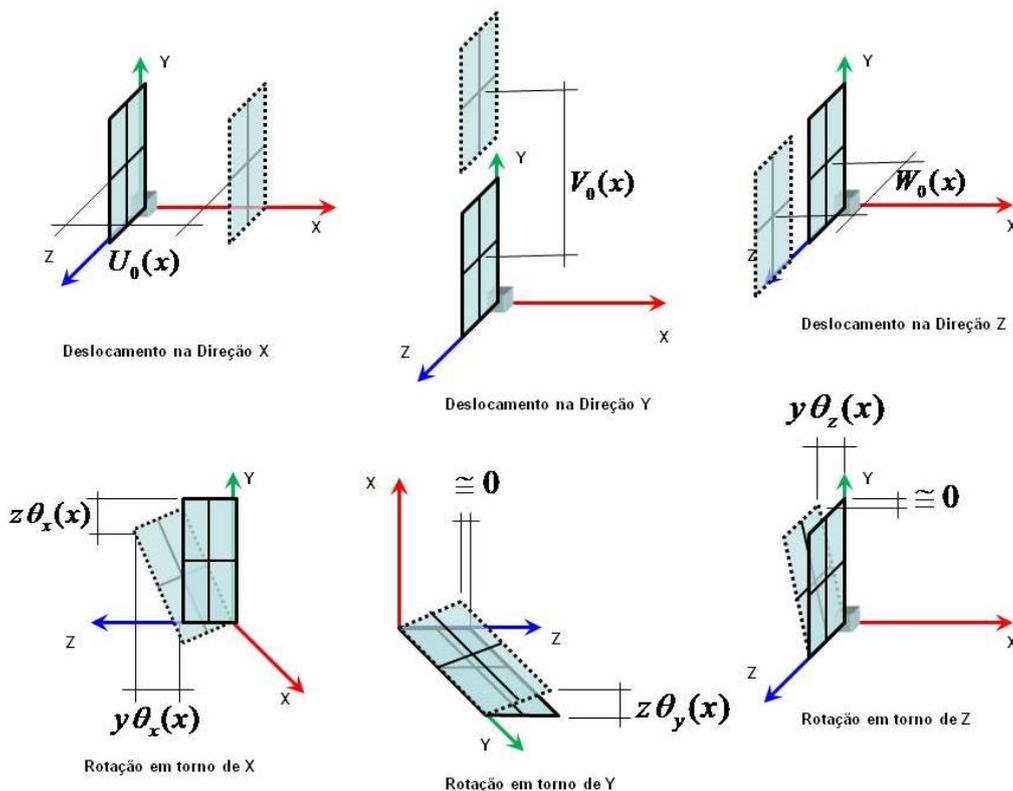
Tal qual no caso bidimensional a superposição de efeitos para deslocamentos continua sendo válida e também as simplificações por pequenos deslocamentos nas funções  $\sin(\theta)$  e  $\cos(\theta)$ .

Como foi descrito anteriormente, será utilizado o princípio das superposições, logo para melhor ilustrar e facilitar o entendimento a aplicação de deslocamentos arbitrários para determinar o campo de deslocamentos será feito de forma separada, primeiramente para deslocamentos e depois para rotações.

Analogamente ao caso plano, por se tratar de um elemento de barra, que é definido por um eixo de referência, o campo de deslocamentos do elemento é calculado através dos deslocamentos de cada seção no eixo de referência.

Isso é válido devido à consideração de que a seção permanece sempre plana, sendo possível assim associar os deslocamentos de todos os pontos de uma seção com o deslocamento de um ponto na mesma.

A Figura 2-9 ilustra o campo de deslocamentos de uma seção considerando a superposição dos efeitos.



**Figura 2-9 – Campo de deslocamentos para o elemento de pórtico espacial.**

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e rotações e aplicando as simplificações das funções trigonométricas  $\text{sen}(\theta) \cong \theta$  e  $\text{cos}(\theta) \cong 1$ , as equações de campo de deslocamentos ficam:

$$u(x, y, z) = u_0(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) \quad (2.82)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x) - z\theta_x(x) \quad (2.83)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x) + y\theta_x(x) \quad (2.84)$$

Onde:

$u_0(x)$  é o deslocamento da seção na direção x.

$v_0(x)$  é o deslocamento da seção na direção y.

$w_0(x)$  é o deslocamento da seção na direção z.

$\theta_x(x)$  é a rotação da seção em torno do eixo x.

$\theta_y(x)$  é a rotação da seção em torno do eixo y.

$\theta_z(x)$  é a rotação da seção em torno do eixo z.

Reescrevendo as equações acima na forma matricial tem-se:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) \\ v_0(x) - z\theta_x(x) \\ w_0(x) + y\theta_x(x) \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

### 2.2.2 Equações de Compatibilidade

Aqui as equações de compatibilidade, que relacionam deslocamentos e deformações, são obtidas a partir das equações da Teoria da Elasticidade, assim como foi descrito para o caso plano, obtendo às equações a seguir.

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.86)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.87)$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.88)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.89)$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.90)$$

$$\gamma_{zx}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.91)$$

A Figura 2-10 ilustra as possíveis deformações sofridas por um elemento, de acordo com a teoria da elasticidade.

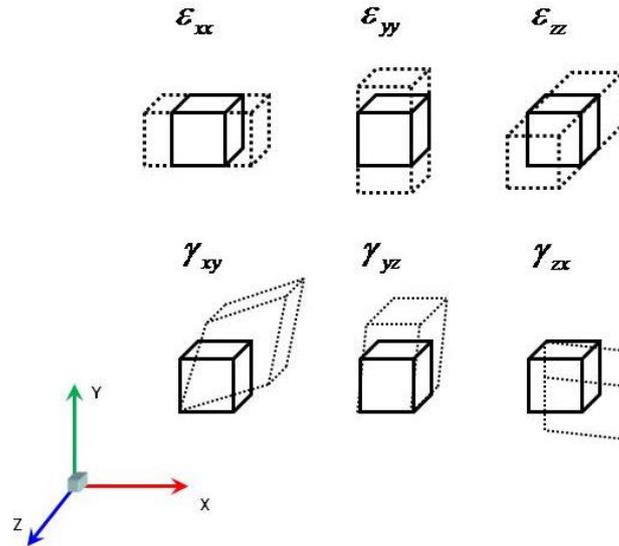


Figura 2-10 – Visualização das deformações de um elemento infinitesimal, para o caso tridimensional.

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \varepsilon_{zz}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{zx}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

A partir do campo de deslocamentos e das equações da teoria da elasticidade determinam-se as equações do campo de deformações.

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y \theta_z(x))}{\partial x} + \frac{\partial(z \theta_y(x))}{\partial x} = u'_0(x) - y \theta'_z(x) + z \theta'_y(x) \quad (2.93)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial y} - \frac{\partial z \theta_x(x)}{\partial y} = 0 \quad (2.94)$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial w_0(x)}{\partial z} + \frac{\partial y \theta_x(x)}{\partial z} = 0 \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial y} - \frac{\partial(y \theta_z(x))}{\partial y} + \frac{\partial(z \theta_y(x))}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial z \theta_x(x)}{\partial x} = \\ &= v_0'(x) - \theta_z(x) - z \theta_x'(x) \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial z} - \frac{\partial z \theta_x(x)}{\partial z} + \frac{\partial w_0(x)}{\partial y} + \frac{\partial y \theta_x(x)}{\partial y} = \\ &= -\theta_x(x) + \theta_x(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx}(x, y, z) &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + \frac{\partial y \theta_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial z} - \frac{\partial(y \theta_z(x))}{\partial z} + \frac{\partial(z \theta_y(x))}{\partial z} = \\ &= w_0'(x) + y \theta_x'(x) + \theta_y(x) \end{aligned} \quad (2.98)$$

A partir das equações de deformações generalizadas podemos obter as deformações no eixo de referência da seção:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= \varepsilon_{xx}(x, 0, 0) = u_0'(x) - 0 \theta_z'(x) + 0 \theta_y'(x) = u_0'(x) \\ \gamma_{0xy}(x) &= \gamma_{xy}(x, 0, 0) = v_0'(x) - \theta_z'(x) - 0 \theta_x'(x) = v_0'(x) - \theta_z'(x) \\ \gamma_{0yz}(x) &= \gamma_{yz}(x, 0, 0) = 0 \\ \gamma_{0zx}(x) &= \gamma_{zx}(x, 0, 0) = w_0'(x) + \theta_y(x) + 0 \theta_x(x) = w_0'(x) + \theta_y(x) \end{aligned} \quad (2.99)$$

E utilizando a definição de curvatura que é a derivada da rotação, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_x(x) &= \theta_x'(x) \\ \phi_y(x) &= \theta_y'(x) \\ \phi_z(x) &= \theta_z'(x) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \gamma_{0,xy}(x) \\ \gamma_{0,zx}(x) \\ \phi_x(x) \\ \phi_y(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ w_0(x) \\ \theta_x(x) \\ \theta_y(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix} \therefore \mathbf{e}(x) = \nabla(x) \mathbf{u}(x) \quad (2.101)$$

Assim, chegam-se às equações diferenciais de compatibilidade de acordo com a teoria de viga Timoshenko para pórtico tridimensional:

$$\begin{cases} \varepsilon_0(x) - u_0'(x) = 0 \\ \gamma_{xy}(x) - v_0'(x) + \theta_z(x) = 0 \\ \gamma_{zx}(x) - w_0'(x) - \theta_y(x) = 0 \\ \phi_x(x) - \theta_x'(x) = 0 \\ \phi_y(x) - \theta_y'(x) = 0 \\ \phi_z(x) - \theta_z'(x) = 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

### 2.2.3 Equações de Equilíbrio

De forma análoga ao do elemento de pórtico bidimensional, o próximo passo é determinar as equações diferenciais de equilíbrio, porém, considerando os três eixos.

Da mesma forma, considera-se um elemento estrutural submetido a carregamentos distribuídos  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  ao longo de seu comprimento nas direções de seus eixos de referência,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Para o caso tridimensional, além das três cargas distribuídas é considerada também uma carga de momento torsor distribuído  $m_x$ , como mostrado na Figura 2-11.

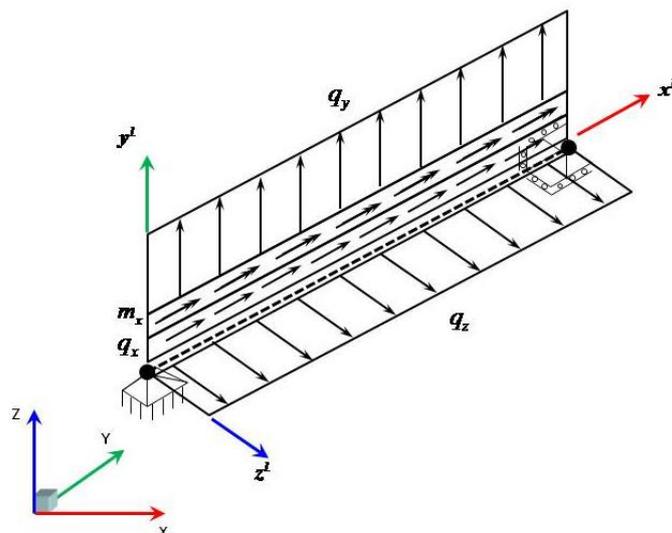


Figura 2-11 – Cargas distribuídas ao longo do elemento.

Assim, é imposta a condição de equilíbrio ao longo e em torno dos três eixos (equilíbrio de forças e de momentos), considerando um elemento pequeno de comprimento  $\Delta x$  e impondo o equilíbrio do mesmo.

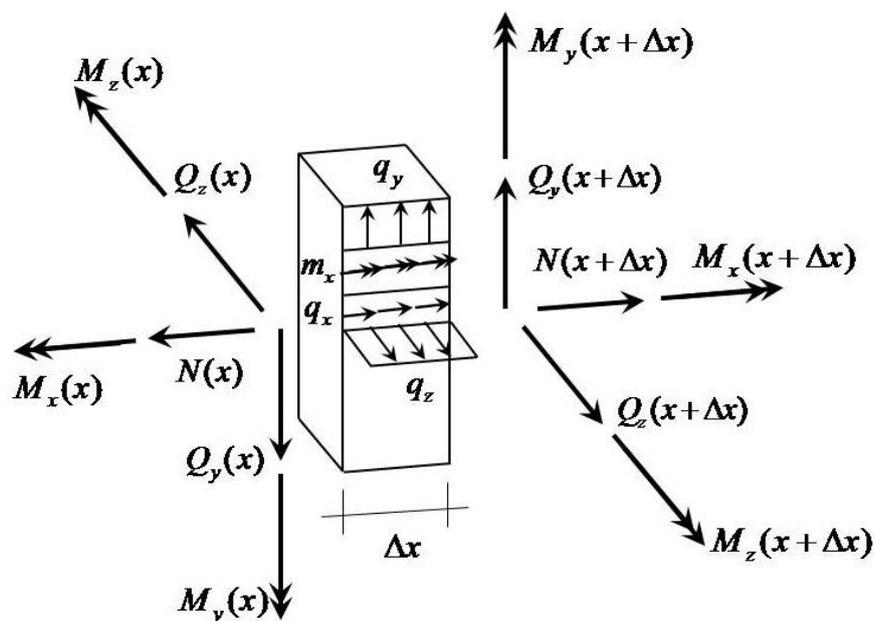


Figura 2-12 – Equilíbrio de um pequeno trecho do elemento submetido a cargas distribuídas.

Impondo-se equilíbrio do elemento na direção  $x$ , tem-se:

$$N(x + \Delta x) + q_x(x) \Delta x - N(x) = 0$$

$$\frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q_x(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} + q_x(x) \right) &= 0 \\ \frac{dN(x)}{dx} + q_x(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Impondo-se equilíbrio do elemento na direção y, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_y(x + \Delta x) + q_y(x) \Delta x - Q_y(x) &= 0 \\ \frac{Q_y(x + \Delta x) - Q_y(x)}{\Delta x} + q_y(x) &= 0 \\ \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{Q_y(x + \Delta x) - Q_y(x)}{\Delta x} + q_y(x) \right) &= 0 \\ \frac{dQ_y(x)}{dx} + q_y(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Impondo se equilíbrio do elemento na direção z, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_z(x + \Delta x) + q_z(x) \Delta x - Q_z(x) &= 0 \\ \frac{Q_z(x + \Delta x) - Q_z(x)}{\Delta x} + q_z(x) &= 0 \\ \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{Q_z(x + \Delta x) - Q_z(x)}{\Delta x} + q_z(x) \right) &= 0 \\ \frac{dQ_z(x)}{dx} + q_z(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Impondo-se equilíbrio do elemento para os momentos atuantes em torno do eixo x, tem-se:

$$\begin{aligned} M_x(x + \Delta x) - M_x(x) + m_x(x) \Delta x &= 0 \\ \frac{M_x(x + \Delta x) - M_x(x)}{\Delta x} + m_x(x) \Delta x &= 0 \\ \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{M_x(x + \Delta x) - M_x(x)}{\Delta x} + m_x(x) \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dM_x(x)}{dx} + m_x(x) = 0 \quad (2.106)$$

Impondo-se equilíbrio do elemento para os momentos atuantes em torno do eixo y, tem-se:

$$\begin{aligned} M_y(x + \Delta x) - M_y(x) - V_z(x + \Delta x) \Delta x + \frac{q_z(x) \Delta x^2}{2} &= 0 \\ \frac{M_y(x + \Delta x) - M_y(x)}{\Delta x} - V_z(x + \Delta x) + \frac{q_z(x) \Delta x}{2} &= 0 \\ \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{M_y(x + \Delta x) - M_y(x)}{\Delta x} - V_z(x + \Delta x) + \frac{q_z(x) \Delta x}{2} \right) &= 0 \\ \frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Impondo-se equilíbrio do elemento para os momentos atuantes em torno do eixo z, tem-se:

$$\begin{aligned} M_z(x + \Delta x) - M_z(x) + V_y(x + \Delta x) \Delta x + \frac{q_y(x) \Delta x^2}{2} &= 0 \\ \frac{M_z(x + \Delta x) - M_z(x)}{\Delta x} + V_y(x + \Delta x) + \frac{q_y(x) \Delta x}{2} &= 0 \\ \frac{\text{Lim}}{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{M_z(x + \Delta x) - M_z(x)}{\Delta x} + V_y(x + \Delta x) + \frac{q_y(x) \Delta x}{2} \right) &= 0 \\ \frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Assim, chega-se às equações de equilíbrio considerando a teoria de viga de Timoshenko:

$$\left\{ \begin{array}{l} N'(x) + q_x = 0 \\ V_y'(x) + q_y = 0 \\ V_z'(x) + q_z = 0 \\ M_x'(x) + m_x(x) = 0 \\ M_y'(x) - V_z(x) = 0 \\ M_z'(x) + V_y(x) = 0 \end{array} \right. \quad (2.109)$$

## 2.2.4 Equações Constitutivas

As equações constitutivas são as leis que relacionam as tensões e deformações no material. Dentre essas leis, a mais utilizada na resolução de problemas lineares é a Lei de Hooke, onde as tensões são linearmente proporcionais às deformações.

Assim, considerando material linear elástico as relações constitutivas são descritas a seguir:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx}(x, y, z) - \nu (\sigma_{yy}(x, y, z) + \sigma_{zz}(x, y, z)) \right] \quad (2.110)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{yy}(x, y, z) - \nu (\sigma_{xx}(x, y, z) + \sigma_{zz}(x, y, z)) \right] \quad (2.111)$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{zz}(x, y, z) - \nu (\sigma_{xx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z)) \right] \quad (2.112)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\tau_{xy}(x, y, z)}{G} \quad (2.113)$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\tau_{yz}(x, y, z)}{G} \quad (2.114)$$

$$\gamma_{zx}(x, y, z) = \frac{\tau_{zx}(x, y, z)}{G} \quad (2.115)$$

Na forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \varepsilon_{zz}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{zx}(x, y, z) \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(x, y, z) \\ \sigma_{yy}(x, y, z) \\ \sigma_{zz}(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{zx}(x, y, z) \end{array} \right\} \quad (2.116)$$

## 2.2.5 Matriz de Rigidez do Elemento.

Assim como no elemento plano, para o elemento espacial também é definido um sistema básico.

O sistema básico de coordenadas possui as seguintes condições de restrições nodais:

O nó I possui restrição a translação nos três eixos e a rotação no eixo do elemento.

O nó J possui restrição a translação nos eixos transversais ao elemento, y e z, e não possui restrição a rotação em nenhum dos eixos.

A Figura 2-13 ilustra as condições de vínculo do sistema básico descrito acima.

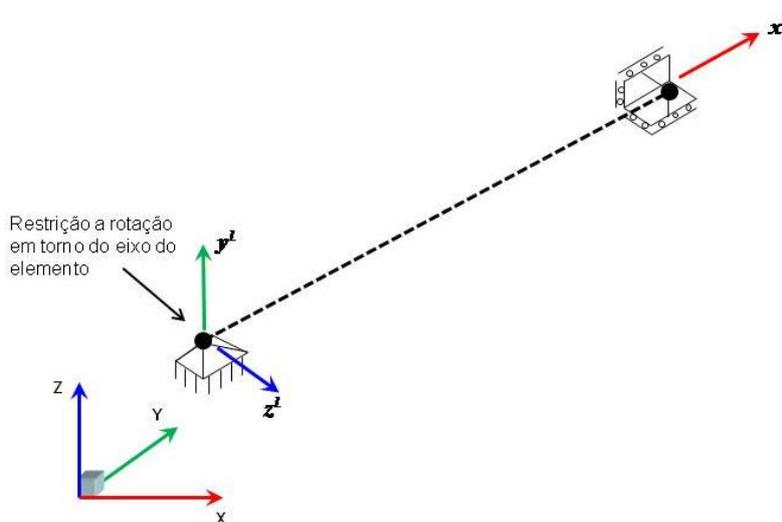


Figura 2-13 – Condições de vínculo do sistema básico de coordenadas.

## 2.2.6 Princípio das Forças Virtuais

O princípio das forças virtuais para a teoria de viga de Timoshenko será deduzido através das equações diferenciais de compatibilidade (2.102), na forma fraca, chegando a seguinte expressão:

$$\int_0^L [(\varepsilon_0(x) - u_0'(x))\delta N(x) + (\phi_y(x) - \theta_y'(x))\delta M_y(x) + (\phi_z(x) - \theta_z'(x))\delta M_z(x) + (\phi_x(x) - \theta_x'(x))\delta M_x(x) + (\gamma_{0xy}(x) - v_0'(x) + \theta_z(x))\delta V_y(x) + (\gamma_{0zx}(x) - w_0'(x) - \theta_y(x))\delta V_z(x)] dx = 0 \quad (2.117)$$

Desenvolvendo a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\varepsilon_0(x) \delta N(x)) dx - \int_0^L (u'_0(x) \delta N(x)) dx + \int_0^L (\phi_y(x) \delta M_y(x)) dx - \int_0^L (\theta'_y(x) \delta M_y(x)) dx + \\
& + \int_0^L (\phi_z(x) \delta M_z(x)) dx - \int_0^L (\theta'_z(x) \delta M_z(x)) dx + \int_0^L (\phi_x(x) \delta M_x(x)) dx - \int_0^L (\theta'_x(x) \delta M_x(x)) dx \\
& + \int_0^L (\gamma_{0xy}(x) \delta V_y(x)) dx - \int_0^L (v'_0(x) \delta V_y(x)) dx + \int_0^L (\theta_z(x) \delta V_y(x)) dx + \\
& + \int_0^L (\gamma_{0zx}(x) \delta V_z(x)) dx - \int_0^L (w'_0(x) \delta V_z(x)) dx - \int_0^L (\theta_y(x) \delta V_z(x)) dx = 0
\end{aligned}
\tag{2.118}$$

Para resolver a integral acima se utiliza a integração por partes em cada termo da equação (2.118).

Empregando a integração por partes tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^L u'_0(x) \delta N(x) dx &= u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L - \int_0^L u_0(x) \delta N'(x) dx \\
\int_0^L v'_0(x) \delta V_y(x) dx &= v_0(x) \delta V_y(x) \Big|_0^L - \int_0^L v_0(x) \delta V'_y(x) dx \\
\int_0^L w'_0(x) \delta V_z(x) dx &= w_0(x) \delta V_z(x) \Big|_0^L - \int_0^L w_0(x) \delta V'_z(x) dx \\
\int_0^L \theta'_x(x) \delta M_x(x) dx &= \theta_x(x) \delta M_x(x) \Big|_0^L - \int_0^L \theta_x(x) \delta M'_x(x) dx \\
\int_0^L \theta'_y(x) \delta M_y(x) dx &= \theta_y(x) \delta M_y(x) \Big|_0^L - \int_0^L \theta_y(x) \delta M'_y(x) dx \\
\int_0^L \theta'_z(x) \delta M_z(x) dx &= \theta_z(x) \delta M_z(x) \Big|_0^L - \int_0^L \theta_z(x) \delta M'_z(x) dx
\end{aligned}
\tag{2.119}$$

Substituindo o resultado da integração por partes das equações (2.119) na equação (2.118) tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\varepsilon_0(x) \delta N(x)) dx + \int_0^L (\gamma_{0xy}(x) \delta V_y(x)) dx + \int_0^L (\gamma_{0zx}(x) \delta V_z(x)) dx \\
& + \int_0^L (\phi_x(x) \delta M_x(x)) dx + \int_0^L (\phi_y(x) \delta M_y(x)) dx + \int_0^L (\phi_z(x) \delta M_z(x)) dx + \\
& \quad - \int_0^L (\theta_y(x) \delta V_z(x)) dx + \int_0^L (\theta_z(x) \delta V_y(x)) dx + \\
& + \int_0^L (u_0(x) \delta N'(x)) dx + \int_0^L (v_0(x) \delta V'_y(x)) dx + \int_0^L (w_0(x) \delta V'_z(x)) dx + \\
& - \int_0^L (\theta_x(x) \delta M'_x(x)) dx - \int_0^L (\theta_y(x) \delta M'_y(x)) dx - \int_0^L (\theta_z(x) \delta M'_z(x)) dx + \\
& \quad - u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L - v_0(x) \delta V_y(x) \Big|_0^L - w_0(x) \delta V_z(x) \Big|_0^L + \\
& \quad - \theta_x(x) \delta M_x(x) \Big|_0^L - \theta_y(x) \delta M_y(x) \Big|_0^L - \theta_z(x) \delta M_z(x) \Big|_0^L = 0
\end{aligned} \tag{2.120}$$

De acordo com as equações diferenciais de equilíbrio, que também valem para forças virtuais e considerando os carregamentos distribuídos virtuais nulos, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta N'(x) = -\delta q_x = 0 \\ \delta V'_y(x) = -\delta q_y = 0 \\ \delta V'_z(x) = -\delta q_z = 0 \\ \delta M'_x(x) = -\delta m_x(x) = 0 \\ \delta M'_y(x) = \delta V_z(x) \\ \delta M'_z(x) = -\delta V_y(x) \end{array} \right.$$

Logo, a equação (2.120) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\varepsilon_0(x) \delta N(x)) dx + \int_0^L (\gamma_{0xy}(x) \delta V_y(x)) dx + \int_0^L (\gamma_{0zx}(x) \delta V_z(x)) dx \\
& + \int_0^L (\phi_x(x) \delta M_x(x)) dx + \int_0^L (\phi_y(x) \delta M_y(x)) dx + \int_0^L (\phi_z(x) \delta M_z(x)) dx = \\
& \quad u_0(x) \delta N(x) \Big|_0^L + v_0(x) \delta V_y(x) \Big|_0^L + w_0(x) \delta V_z(x) \Big|_0^L + \\
& \quad + \theta_x(x) \delta M_x(x) \Big|_0^L + \theta_y(x) \delta M_y(x) \Big|_0^L + \theta_z(x) \delta M_z(x) \Big|_0^L
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Desenvolvendo a segunda parte da equação (2.121), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L ((\varepsilon_0(x) \delta N(x)) + (\gamma_{0xy}(x) \delta V_y(x)) + (\gamma_{0zx}(x) \delta V_z(x)) + \\
& + (\phi_x(x) \delta M_x(x)) + (\phi_y(x) \delta M_y(x)) + (\phi_z(x) \delta M_z(x))) dx = \\
& = u_0(L) \delta N(L) - u_0(0) \delta N(0) + v_0(L) \delta V_y(L) - v_0(0) \delta V_y(0) + \\
& + w_0(L) \delta V_z(L) - w_0(0) \delta V_z(0) + \theta_x(L) \delta M_x(L) - \theta_x(0) \delta M_x(0) + \\
& + \theta_y(L) \delta M_y(L) - \theta_y(0) \delta M_y(0) + \theta_z(L) \delta M_z(L) - \theta_z(0) \delta M_z(0)
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Com base no sistema básico definido anteriormente, obtém-se as condições de contorno para desenvolver o segundo termo da equação (2.122). A seguir, estão as condições de contorno do sistema básico. As expressões para esforço cortante são obtidas a partir das reações de equilíbrio do sistema básico.

A Figura 2-14 mostra as condições de contorno do sistema básico.

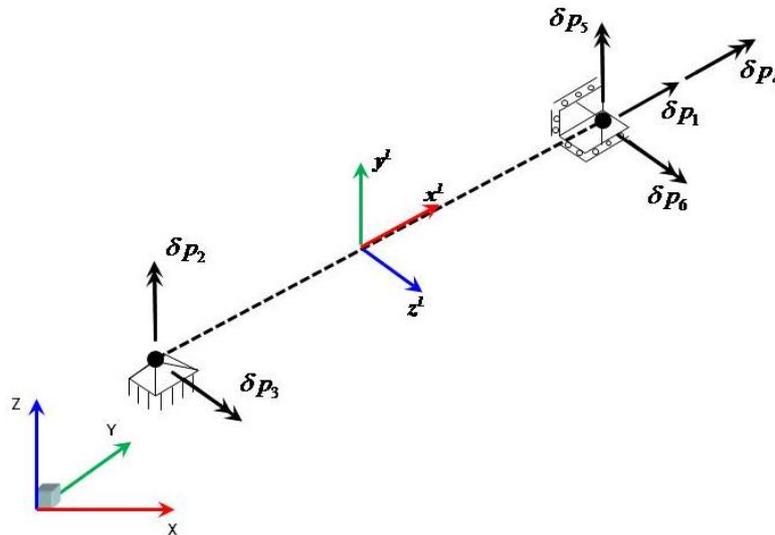


Figura 2-14 – Condições de contorno do sistema de coordenadas básico.

$$\begin{aligned}
\delta N(0) &= \delta p_1^b & \delta M_y(0) &= -\delta p_2^b & \delta M_z(0) &= -\delta p_3^b \\
\delta M_x(0) &= \delta p_4^b & \delta M_y(L) &= \delta p_5^b & \delta M_z(L) &= \delta p_6^b
\end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned}
u_0(0) &= 0 & u_0(L) &= d_1^B \\
v_0(0) &= 0 & v_0(L) &= d_2^B \\
w_0(0) &= 0 & w_0(L) &= d_3^B \\
\theta_x(0) &= 0 & \theta_x(L) &= d_4^B \\
\theta_y(0) &= 0 & \theta_y(L) &= d_5^B \\
\theta_z(0) &= 0 & \theta_z(L) &= d_6^B
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Substituindo as condições de contorno na equação (2.122) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L ((\varepsilon_0(x) \delta N(x)) + (\gamma_{0xy}(x) \delta V_y(x)) + (\gamma_{0zx}(x) \delta V_z(x)) + \\ & + (\phi_x(x) \delta M_x(x)) + (\phi_y(x) \delta M_y(x)) + (\phi_z(x) \delta M_z(x))) dx = \\ & d_1^B \delta p_1^B + d_2^B \delta p_2^B + d_3^B \delta p_3^B + d_4^B \delta p_4^B + d_5^B \delta p_5^B + d_6^B \delta p_6^B \end{aligned} \quad (2.125)$$

Reescrevendo a equação (2.125) na forma matricial:

$$\int_0^L \left\{ \begin{array}{cccccc} \varepsilon_0(x) & \gamma_{0xy}(x) & \gamma_{0zx}(x) & \phi_x(x) & \phi_y(x) & \phi_z(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \delta N(x) \\ \delta V_y(x) \\ \delta V_z(x) \\ \delta M_x(x) \\ \delta M_y(x) \\ \delta M_z(x) \end{array} \right\} dx = \left\{ d_1^B \quad d_2^B \quad d_3^B \quad d_4^B \quad d_5^B \quad d_6^B \right\} \left\{ \begin{array}{c} \delta p_1^B \\ \delta p_2^B \\ \delta p_3^B \\ \delta p_4^B \\ \delta p_5^B \\ \delta p_6^B \end{array} \right\} \quad (2.126)$$

$$\int_0^L \mathbf{e}(x)^T \delta \mathbf{S}(x) dx = \mathbf{d}^{B^T} \delta \mathbf{p}^B \quad (2.127)$$

Onde:

$\mathbf{e}(x)$  é o campo de deformações reais do eixo de referência do elemento.

$\delta \mathbf{S}(x)$  é o campo de esforços internos virtuais do elemento.

$\mathbf{d}^B$  é o vetor de deslocamentos reais do sistema de coordenadas básico.

$\delta \mathbf{p}^B$  é o vetor de forças nodais virtuais no sistema de coordenadas básico.

A equação (2.127) é o princípio das forças virtuais.

### 2.2.7 Funções Interpoladoras de Forças

Para determinar as funções de interpolação de forças consideram-se nulas as cargas distribuídas ao longo do elemento. Assim, utilizam-se somente cargas nodais.

A consideração das cargas distribuídas será feita posteriormente para determinar o vetor de cargas equivalentes do elemento.

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0 \quad (2.128)$$

$$\frac{dV_y(x)}{dx} = 0 \quad (2.129)$$

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = 0 \quad (2.130)$$

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = 0 \quad (2.131)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) = 0 \quad (2.132)$$

$$\frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x) = 0 \quad (2.133)$$

Integrando as equações anteriores, tem-se:

$$N(x) = C_1 \quad (2.134)$$

$$V_y(x) = C_2 \quad (2.135)$$

$$V_z(x) = C_3 \quad (2.136)$$

$$M_x(x) = C_4 \quad (2.137)$$

$$M_y(x) = x C_3 + C_5 \quad (2.138)$$

$$M_z(x) = -x C_2 + C_6 \quad (2.139)$$

onde  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  e  $C_6$  são constantes de integração.

Representando as equações (2.134) a (2.139) na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (2.140)$$

A partir das reações de apoio do sistema básico podem-se obter condições de contorno para determinar as constantes de integração das funções interpoladoras de forças.

Aplicando as condições de contorno do sistema de coordenadas básico de na equação (2.140) tem-se as seguintes expressões.

$$\begin{array}{lll} \delta N(0) = \delta p_1^b & \delta M_y(0) = -\delta p_2^b & \delta M_z(0) = -\delta p_3^b \\ \delta M_x(0) = \delta p_4^b & \delta M_y(L) = \delta p_5^b & \delta M_z(L) = \delta p_6^b \end{array}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N(L) \\ M_y(0) \\ M_z(0) \\ M_x(L) \\ M_y(L) \\ M_z(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^B \\ -p_2^B \\ -p_3^B \\ p_4^B \\ p_5^B \\ p_6^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (2.141)$$

Isolando o termo das constantes de integração da equação (2.141), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \\ p_4^B \\ p_5^B \\ p_6^B \end{Bmatrix} \quad (2.142)$$

Substituindo os valores das constantes de integração na equação (2.140)

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{L}-1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{L}-1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \\ p_4^B \\ p_5^B \\ p_6^B \end{Bmatrix} \quad (2.143)$$

Ou seja:

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x) \mathbf{p}^B \quad (2.144)$$

Onde:

$\mathbf{S}(x)$  é o vetor de esforços na seção.

$\mathbf{b}(x)$  é a matriz de interpolação de forças.

$\mathbf{p}^B$  é o vetor de cargas nodais no sistema básico.

A equação (2.144) fornece o vetor de esforços internos em qualquer ponto do elemento a partir de suas forças nodais, definindo assim uma matriz de interpolação de esforços no sistema básico que depende somente das forças nodais.

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{L}-1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{L}-1 & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

### 2.2.8 Matriz de Flexibilidade e de Rigidez da Seção

Assim como feita a dedução da matriz de flexibilidade para o caso plano será feito para o caso espacial, será feita a integral das tensões na área da seção transversal determinando assim a matriz de rigidez e invertendo a mesma para obter a matriz de flexibilidade.

Para isso parte-se dos campos de tensão de acordo com as expressões da teoria da elasticidade e dos campos de deformações obtidos anteriormente.

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_{xx}(x, y, z) dA = \int_A (E u'_0(x) - E y \theta'_z(x) + E z \theta'_y(x)) dA \\ &= \int_A (E \varepsilon_0(x) - E y \phi_z(x) + E z \phi_y(x)) dA \\ &= E A(x) \varepsilon_0(x) - E S_z(x) \phi_z(x) + E S_y(x) \phi_y(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_y(x) &= \int_A \sigma_{xy}(x, y, z) dA = \int_A (G v'_0(x) - G \theta_z(x) - G z \theta'_x(x)) dA \\ &= G \gamma_{0xy}(x) \int_A dA - G z \phi_x(x) \int_A dA \\ &= G A(x) k_y \gamma_{0xy}(x) - z G A(x) k_y \phi_x(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_z(x) &= \int_A \sigma_{zx}(x, y, z) dA = \int_A G (w'_0(x) + \theta_y(x)) + G y \theta'_x(x) dA \\ &= G \gamma_{0zx}(x) \int_A dA + G y \phi_x(x) \int_A dA = \\ &= G A(x) k_z \gamma_{0zx}(x) + y G A(x) k_z \phi_x(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x(x) &= \int_A (-\sigma_{xy}(x, y) z + \sigma_{zx}(x, y) y) dA \\
&= \int_A (-G (v'_0(x) - \theta'_z(x)) z + G z^2 \theta'_x(x) + G (w'_0(x) + \theta_y(x)) y + G y^2 \theta'_x(x)) dA \\
&= \int_A (-G \gamma_{0xy}(x) z + G \gamma_{0zx}(x) y + G (z^2 + y^2) \phi'_x(x)) dA \\
&= -z G A(x) k_y \gamma_{0xy}(x) + G A(x) k_z \gamma_{0zx}(x) = (GJ(x) + G(A(x)k_y z^2 + A(x)k_z y^2)) \phi'_x(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= \int_A \sigma_{xx}(x, y, z) z dA = \int_A (E z u'_0(x) - E z y \theta'_z(x) + E z^2 \theta'_y(x)) dA \\
&= \int_A (E z \varepsilon_0(x) - E z y \phi'_z(x) + E z^2 \phi'_y(x)) dA \\
&E S_y(x) \varepsilon_0(x) + E I_y(x) \phi'_y(x) - E I_{yz}(x) \phi'_z(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_z(x) &= -\int_A \sigma_{xx}(x, y, z) y dA = -\int_A (E y u'_0(x) - E y^2 \theta'_z(x) + E y z \theta'_y(x)) dA \\
&= -\int_A (E y \varepsilon_0(x) - E y^2 \phi'_z(x) + E y z \phi'_y(x)) dA \\
&= -E S_z(x) \varepsilon_0(x) + E I_z(x) \phi'_z(x) - E I_{yz}(x) \phi'_y(x)
\end{aligned}$$

Onde:

$$A(x) = \int_A dA \text{ é a área da seção transversal.}$$

$$S_y(x) = \int_A z dA \text{ é o primeiro momento estático em torno do eixo y.}$$

$$S_z(x) = \int_A y dA \text{ é o primeiro momento estático em torno do eixo z.}$$

$$J(x) = \int_A y^2 + z^2 dA \text{ é o momento de inércia polar em torno do eixo x.}$$

$$I_y(x) = \int_A z^2 dA \text{ é o segundo momento estático ou momento de inércia em torno do eixo y.}$$

$$I_z(x) = \int_A y^2 dA \text{ é o segundo momento estático ou momento de inércia em torno do eixo z.}$$

z.

$$I_{yz}(x) = \int_A yz dA \text{ é denominado produto de inércia.}$$

$k_y$  é o fator relaciona a área da seção com a área de cisalhamento na direção y.

$k_z$  é o fator relaciona a área da seção com a área de cisalhamento na direção z.

Com as expressões acima é possível determinar a matriz de rigidez da seção.

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} EA(x) & 0 & 0 & 0 & ES_y(x) & -ES_z(x) \\ 0 & GA(x)k_y & 0 & -zGA(x)k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA(x)k_z & yGA(x)k_z & 0 & 0 \\ 0 & -zGA(x)k_y & yGA(x)k_z & GJ(x) + G(A(x)k_y z^2 + A(x)k_z y^2) & 0 & 0 \\ ES_y(x) & 0 & 0 & 0 & EI_y(x) & -EI_{yz}(x) \\ -ES_z(x) & 0 & 0 & 0 & -EI_{yz}(x) & EI_z(x) \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

Assim, tem-se a expressão que relaciona as deformações na seção com os esforços na mesma.

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{k}_s(x)\mathbf{e}(x) \quad (2.147)$$

Como já mostrado anteriormente, a matriz de flexibilidade é a inversa da matriz de rigidez, logo:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{k}_s(x)^{-1} \quad (2.148)$$

Portanto:

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{f}_s(x)\mathbf{S}(x) \quad (2.149)$$

### 2.2.9 Matriz de Flexibilidade e Matriz de Rigidez do Elemento

Através da equação que relaciona os esforços na seção com o vetor de forças virtuais no sistema básico, equação (2.144), tem-se:

$$\delta\mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x)\delta\mathbf{p}^B \quad (2.150)$$

De acordo com o princípio das forças virtuais (2.127), tem-se:

$$\int_0^L \mathbf{e}(x)^T \delta\mathbf{S}(x) dx = \mathbf{d}^{B^T} \delta\mathbf{p}^B \quad (2.151)$$

Substituindo a equação (2.150) na equação (2.151), tem-se:

$$\delta\mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \int_0^L \delta\mathbf{p}^{B^T} \mathbf{b}^T(x) \mathbf{e}(x) dx \quad (2.152)$$

Como as forças virtuais não variam ao longo do elemento, então o vetor de cargas nodais no sistema básico pode ser retirado da integral e a equação (2.152) resulta em:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{B^T} \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{e}(x) dx \quad (2.153)$$

Como as forças virtuais são completamente arbitrárias, tem-se que:

$$\mathbf{d}^B = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{e}(x) dx \quad (2.154)$$

Esta equação é válida para qualquer material.

Substituindo a equação (2.149) na equação (2.154):

$$\mathbf{d}^B = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{S}(x) dx = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{b}(x) dx \mathbf{p}^B = \mathbf{f}^B(x) \mathbf{p}^B \quad (2.155)$$

onde:

$$\mathbf{f}^B(x) = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{b}(x) dx \quad (2.156)$$

é a matriz de flexibilidade do elemento no sistema básico.

Mais uma vez esta expressão é válida para qualquer forma de variação de seção de um elemento reticulado.

Fazendo a inversão da relação expressa na equação (2.155), tem-se:

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{f}^B(x)^{-1} \mathbf{d}^B \quad (2.157)$$

Logo:

$$\mathbf{k}^B(x) = \mathbf{f}^B(x)^{-1} \quad (2.158)$$

que é a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas básico.

Para realizar a transformação do sistema de coordenadas básico para o sistema de coordenadas local, pode-se partir do equilíbrio de forças no sistema básico, como mostra a Figura 2-15.

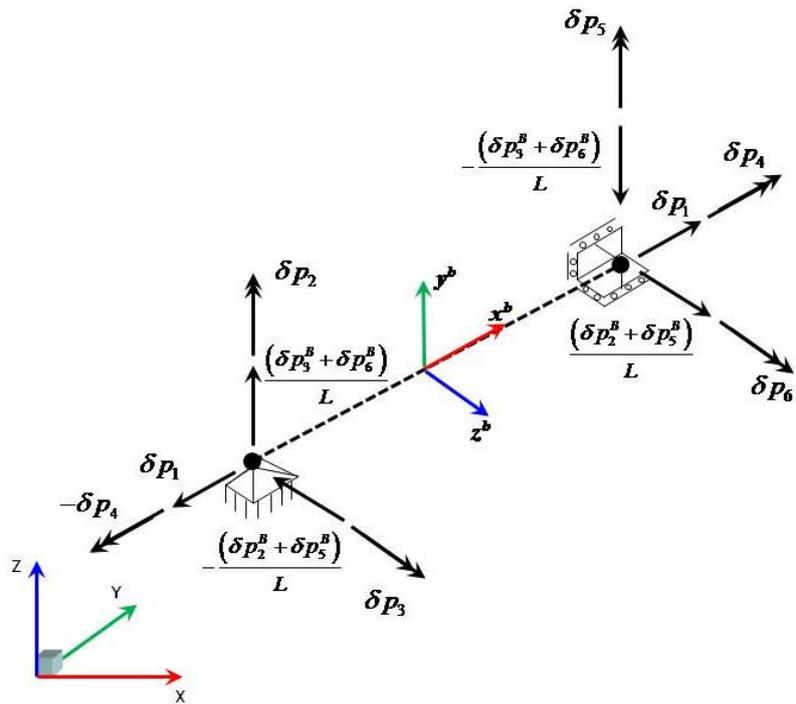


Figura 2-15 – Reações de Equilíbrio do Sistema de Coordenadas Básico.

De modo análogo ao caso plano, é feita a relação dos esforços nodais no sistema local e as reações de equilíbrio no sistema básico, obtendo as seguintes relações.

A Figura 2-16 mostra o sistema local de coordenadas para um elemento de pórtico espacial.

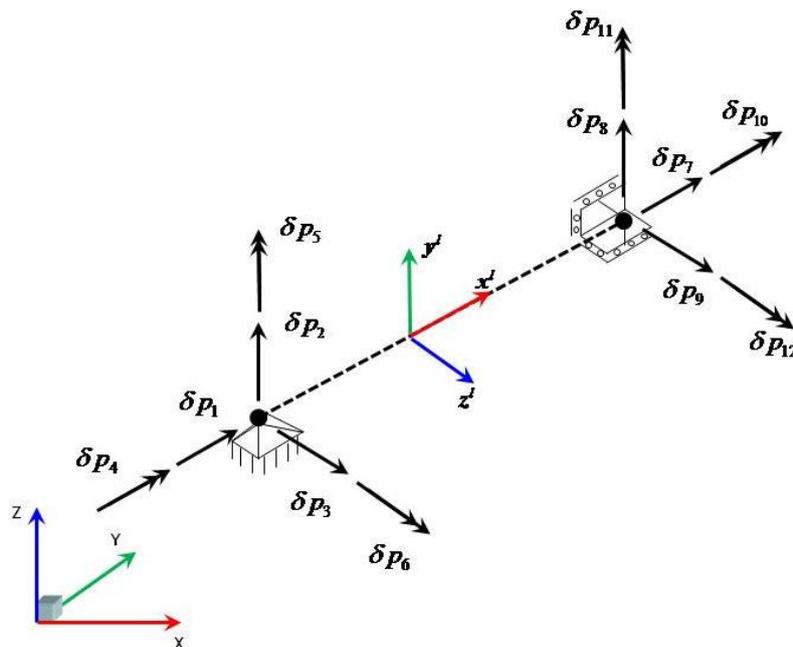


Figura 2-16 – Sistema de coordenadas local para o elemento espacial.

$$\begin{aligned}
 p_1^L &= -p_1^B & p_7^L &= p_1^B \\
 p_2^L &= \frac{(p_3^B + p_6^B)}{L} & p_8^L &= -\frac{(p_3^B + p_6^B)}{L} \\
 p_3^L &= -\frac{(p_2^B + p_5^B)}{L} & p_9^L &= \frac{(p_2^B + p_5^B)}{L} \\
 p_4^L &= -p_4^B & p_{10}^L &= p_4^B \\
 p_5^L &= p_2^B & p_{11}^L &= p_5^B \\
 p_6^L &= p_3^B & p_{12}^L &= p_6^B
 \end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1^L \\ p_2^L \\ p_3^L \\ p_4^L \\ p_5^L \\ p_6^L \\ p_7^L \\ p_8^L \\ p_9^L \\ p_{10}^L \\ p_{11}^L \\ p_{12}^L \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \\ p_4^B \\ p_5^B \\ p_6^B \end{array} \right\} = \mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{p}^B \quad (2.159)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de forças do sistema de coordenadas básico para o sistema de coordenadas locais.

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Aplicando o princípio do trabalho virtual obtém-se a seguinte relação:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{L^T} \mathbf{d}^L \quad (2.161)$$

Novamente, como a equação de transformação de forças também vale para forças virtuais, tem-se:

$$\delta \mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \delta \mathbf{p}^B \quad (2.162)$$

Substituindo a equação (2.162) na equação (2.161), obtém-se:

$$\delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{d}^B = \delta \mathbf{p}^{B^T} \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.163)$$

Logo:

$$\mathbf{d}^B = \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.164)$$

A equação a seguir relaciona os esforços nodais com os deslocamentos nodais do sistema básico.

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{k}^B \mathbf{d}^B \quad (2.165)$$

Fazendo a transformação dos deslocamentos do sistema básico para o sistema local, tem-se:

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{k}^{B^T} \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.166)$$

Agora fazendo a transformação dos esforços nodais do sistema básico para o sistema local e arrumando os termos da equação, tem-se:

$$\mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B \mathbf{T} \mathbf{d}^L \quad (2.167)$$

Por analogia, tem-se que a expressão a seguir é a matriz de rigidez no sistema de coordenadas local do elemento.

$$\mathbf{k}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B \mathbf{T} \quad (2.168)$$

Pode-se observar que esta equação é válida para qualquer seção.

### 2.2.10 Vetor de Cargas Equivalentes do Elemento

Para determinar o vetor de cargas equivalentes às cargas distribuídas, utiliza-se a superposição dos efeitos, considerando separadamente cargas nodais e distribuídas.

Assim, considerando um elemento com cargas distribuídas  $q_x(x)$ ,  $q_y(x)$ ,  $q_z(x)$  e  $m_x(x)$ , como mostra a Figura 2-11. Temos que, de acordo com esse sistema determinam-se os esforços em uma seção qualquer ao longo do elemento:

$$N(x) = q_x(x) l - q_x(x) x \quad (2.169)$$

$$Q_y(x) = \frac{q_y(x) l}{2} - q_y(x) x \quad (2.170)$$

$$Q_z(x) = \frac{q_z(x) l}{2} - q_z(x) x \quad (2.171)$$

$$M_x(x) = m_x(x) l - m_x(x) x \quad (2.172)$$

$$M_y(x) = \frac{q_z(x) l}{2} x - \frac{q_z(x) x^2}{2} \quad (2.173)$$

$$M_z(x) = \frac{q_y(x) l}{2} x - \frac{q_y(x) x^2}{2} \quad (2.174)$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_x(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2}-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{2}-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l-x \\ 0 & 0 & \frac{lx}{2}-\frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{lx}{2}-\frac{x^2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(x) \\ q_y(x) \\ q_z(x) \\ m_x(x) \end{Bmatrix} \quad (2.175)$$

Na forma compacta:

$$S_{eq}(x) = b_{eq}(x) q^B(x) \quad (2.176)$$

Onde:

$S_{eq}(x)$  é o vetor de esforços na seção devido às cargas distribuídas.

$b_{eq}(x)$  é a matriz que determina os esforços na seção devido às cargas distribuídas.

$q^B(x)$  é o vetor de cargas distribuídas ao longo do elemento.

Assim, utilizando-se a superposição dos efeitos a equação (2.144) fica:

$$S(x) = b(x) p^B + b_{eq}(x) q^B(x) \quad (2.177)$$

Substituindo a equação (2.177) na equação (2.155) tem-se:

$$\begin{aligned} d^B &= \int_0^L b(x)^T f_s(x) S(x) dx = \int_0^L b(x)^T f_s(x) b(x) dx p^B + \int_0^L b(x)^T f_s(x) b_{eq}(x) q^B dx \\ &= f^B(x) p^B + d_{eq}^B \end{aligned} \quad (2.178)$$

Isolando o vetor de cargas nodais na equação (2.178) tem-se:

$$\begin{aligned} f^B(x) p^B &= d^B - d_{eq}^B \\ p^B &= f^{B^{-1}}(x) (d^B - d_{eq}^B) \\ &= k^B(x) d^B - k^B d_{eq}^B \\ &= k^B(x) d^B - p_{eq}^B \end{aligned} \quad (2.179)$$

Onde:

$\mathbf{p}_{eq}^B$  é o vetor de cargas equivalentes às cargas distribuídas ao longo do elemento no sistema básico.

$$\mathbf{p}_{eq}^B = \mathbf{k}^B \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}_s(x) \mathbf{b}_{eq}(x) \mathbf{q}^B dx \quad (2.180)$$

Fazendo-se a transformação do sistema de coordenadas básico para o local tem-se:

$$\mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{p}^B = \mathbf{T}^T (\mathbf{k}^B(x) \mathbf{d}^B - \mathbf{p}_{eq}^B) = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B(x) \mathbf{d}^B - \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{eq}^B \quad (2.181)$$

A relação entre os deslocamentos no sistema básico e no sistema local é dada pela equação (2.164), substituindo esta na equação (2.181) tem-se:

$$\mathbf{p}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B(x) \mathbf{T} \mathbf{d}^l - \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{eq}^B \quad (2.182)$$

Logo:

$$\mathbf{p}_{eq}^l = \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{eq}^B \quad (2.183)$$

Porém esta equação não fornece os valores reais do vetor de cargas equivalentes, para isto é necessário que se subtraia as reações de apoio devido às cargas distribuídas. A partir disso a equação (2.183) fica:

$$\mathbf{p}_{eq}^l = \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{eq}^B - \mathbf{p}_{eq}^{*B} \quad (2.184)$$

Onde:

$\mathbf{p}_{eq}^{*B}$  é o vetor de reação de apoio devido às cargas equivalentes.

## CAPÍTULO 3

### Análise estática, pseudo-estática, modal e dinâmica.

---

#### 3.1 Análise Estática.

Na análise pseudo-estático linear, é considerada a proporcionalidade entre deslocamentos e forças que atuam na estrutura. Nesta análise, considera-se que os materiais estão no regime linear elástico e a mudança das ações e efeitos em relação ao tempo, de tal forma que a equação de equilíbrio do problema é dada por:

$$\{\mathbf{P}^{\text{ext}}(t)\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}(t)\} \quad (3.1)$$

Ou na forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1^{\text{ext}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n^{\text{ext}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mm} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_1(t) \\ \vdots \\ D_1(t) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde:

$\mathbf{P}^{\text{ext}}(t)$  é o vetor de forças externas em um determinado instante de tempo, já que se trata de um carregamento móvel. Embora o vetor seja mostrado como em função do tempo, este é utilizado somente para determinar a posição das cargas, pois a intensidade das cargas é constante ao longo do tempo, mudando somente a posição;

$\mathbf{D}(t)$  é o vetor de deslocamentos da estrutura num determinado instante da passagem do trem-tipo;

Segundo Cook (1989),  $\mathbf{K}$  é a matriz característica do elemento que recebe diferentes nomes em diversas áreas, e na análise estrutural é chamada de matriz de rigidez. A matriz de rigidez relaciona os deslocamentos nodais com as forças nodais.

Na análise estática o vetor de cargas e o vetor de deslocamentos não variam com o tempo sendo escritos simplesmente por:  $\mathbf{P}^{\text{ext}}$  e  $\mathbf{D}$ . Na análise pseudo-estática, como as cargas se movimentam sobre a estrutura, o vetor de cargas se modifica de acordo com a posição das cargas no determinado instante, assim como o vetor de deslocamentos também varia. Sendo escritos como:  $\mathbf{P}^{\text{ext}}(t)$  e  $\mathbf{D}(t)$ .

### 3.2 Análise Dinâmica.

Na análise dinâmica linear, considera-se que o carregamento externo varia em função do tempo e considera-se também que atuam, na estrutura, forças inerciais e forças de amortecimento, além das forças elásticas (diretamente proporcionais aos deslocamentos). Desta forma, a imposição da Segunda Lei de Newton ou do Princípio de d’Alambert (Clough e Pienzen, 1993, e Chopra, 1995), leva a equação do movimento:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{P^{\text{ext}}(t)\} \quad (3.3)$$

onde:

[M] é a matriz de massa da estrutura;

[C] é a matriz de amortecimento da estrutura;

[K] é a matriz de rigidez da estrutura;

O símbolo (.) indica derivação em relação ao tempo, tal que  $\dot{D}$  e  $\ddot{D}$  representam, respectivamente, o vetor de velocidades e de acelerações nodais da estrutura. Desta forma, as forças inerciais, de amortecimento e elásticas, são expressas nesta equação pelos termos  $[M]\{\ddot{D}\}$ ,  $[C]\{\dot{D}\}$  e  $[K]\{D\}$ , respectivamente.

O problema representado pela equação (3.3) consiste em um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, cuja solução pode ser obtida através de diversos métodos para integração no tempo (time-step methods). Dentre os mais utilizados, destaca-se o Método de Newmark(1959).

### 3.3 Análise Modal.

Na análise modal sem amortecimento, considera-se que o vetor de cargas externas  $P^{\text{ext}}$  é nulo e que não há efeitos de amortecimento na estrutura. Com isso, a equação do movimento passa a ter a seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = 0 \quad (3.4)$$

Considerando-se que a variação dos deslocamentos no tempo pode ser expressa através de uma função harmônica, a equação (3.4) pode ser reescrita na forma de um problema de auto-valor e auto-vetor generalizado, como é visto na equação (3.5):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (3.5)$$

onde

$\omega$  representa os auto-valores (frequências naturais da estrutura);

$\boldsymbol{\phi}$  representa os auto-vetores (modos de vibração);

No presente trabalho utilizou-se a matriz de massa consistente do elemento, essa matriz considera a distribuição de massa ao longo do elemento para determinar as parcelas de massas de cada grau de liberdade.

## CAPÍTULO 4

### Revisão das normas técnicas.

---

#### 4.1 AÇÕES

As cargas em edificações são definidas quanto a sua natureza e variabilidade no tempo de acordo com duas normas brasileiras, NBR 6120 e NBR 8681. A seguir serão feita uma breve abordagem a essas normas a fim de classificar as cargas atuantes nas estruturas.

##### 4.1.1 NBR 6120 de 1978, Cargas para o calculo de estruturas de edificações

Segundo a NBR 6120 de 1978, Cargas para o calculo de estruturas de edificações, as cargas atuantes em uma edificação são classificadas como permanentes ou acidentais. Esta classificação é feita de acordo com a sua natureza.

**Ações permanentes:** são constituídas pelo peso próprio dos elementos estruturais, elementos fixos e instalações permanentes.

**Ações acidentais:** são aquelas decorrentes do uso da edificação, como: pessoas, móveis, veículos, etc.

##### 4.1.2 NBR 8681 de 2003, Ações e segurança nas estruturas

De acordo com a NBR 8681 de 2003, Ações e segurança nas estruturas, as cargas são classificadas de acordo com a sua variabilidade no tempo e podem ser classificadas em três categorias: permanentes, variáveis e excepcionais.

###### **Ações Permanentes:**

As cargas permanentes classificam-se ainda em diretas ou indiretas, onde:

- a) **Ações Permanentes Diretas:** São os pesos próprios dos elementos da construção, incluindo-se o peso próprio da estrutura e de todos os elementos

construtivos permanentes, os pesos dos equipamentos fixos e os empuxos devidos ao peso próprio de terras não removíveis e de outras ações permanentes sobre elas aplicadas.

- b) **Ações Permanentes Indiretas:** São a protensão, os recalques de apoio e a retração dos materiais.

#### Ações Variáveis:

Consideram-se como ações variáveis as cargas acidentais das construções, e alguns efeitos como: forças de frenação, impacto e centrífuga, os efeitos do vento, das variações de temperatura, do atrito dos aparelhos de apoio e, em geral as pressões hidrostáticas e hidrodinâmicas.

De acordo com a probabilidade de ocorrência durante a vida da edificação as ações variáveis podem ser classificadas como: normais ou especiais.

- a) **Ações Variáveis Normais:** Ações variáveis com ocorrência grande o suficiente para que seja obrigatória a sua consideração no projeto de certo tipo de edificação.
- b) **Ações Variáveis Especiais:** São ações sísmicas, cargas acidentais da natureza. Combinações que incluem este tipo de carga devem ser definidas para as situações especiais.

#### Ações Excepcionais:

São consideradas excepcionais cargas devido a explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes e sismos excepcionais. Os incêndios podem ser considerados levando em conta a redução da resistência dos materiais constituintes.

## 4.2 COMBINAÇÕES

De acordo com as NBR 6118 de 2003 e NBR 8681 de 2003, o carregamento é definido pelo efeito simultâneo de cargas com probabilidade não desprezível de

ocorrerem juntas. A integridade da estrutura deve ser verificada para os estados limites últimos e estados limites de serviço, através de combinações últimas e combinações de serviço.

A NBR 8681 define alguns critérios para as combinações últimas:

- a) As ações permanentes devem estar em todas as combinações de ações.
- b) Ações variáveis nas combinações últimas normais: Em cada combinação última, uma das ações variáveis deve ser considerada como a principal, admitindo-se o seu valor característico, as demais ações variáveis são consideradas como secundárias, admitindo-se o seu valor reduzido de combinação.
- c) Ações variáveis nas combinações últimas especiais: Nas combinações últimas especiais, quando existirem, a ação variável especial deve ser considerada com o seu valor representativo e as demais ações variáveis devem ser consideradas com valores correspondentes a uma probabilidade não desprezível de atuação simultânea com a variável especial.
- d) Ações variáveis nas combinações últimas excepcionais: Nas combinações últimas excepcionais, quando existirem, a ação excepcional deve ser considerada com o seu valor representativo e as demais ações variáveis devem ser consideradas com valores correspondentes a uma grande probabilidade de atuação simultânea com a variável excepcional.

#### 4.2.1 Combinações Últimas:

As combinações últimas podem ser classificadas como: normais, especiais ou de construção ou excepcional.

- a) **Combinações últimas normais:** Neste tipo de combinação estão incluídas as cargas permanentes e a ação variável principal com os seus valores característicos e as demais ações variáveis, secundárias, com seus valores reduzidos por um fator de ponderação de acordo com a NBR 8681.

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{sg} F_{sgk} + \gamma_q \left( F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk} \right) + \gamma_{\varepsilon q} F_{qk} \quad (4.1)$$

- b) **Combinações últimas especiais ou de construção:** Estas combinações consideram as ações permanentes e o valor característico da ação especial e as demais ações variáveis têm seus valores reduzidos, conforme NBR 8681.

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk}) + \gamma_{eq} \psi_{0\epsilon} F_{eqk}$$

- c) **Combinações últimas excepcionais:** Estas combinações consideram as cargas permanentes, e o valor característico da ação variável excepcional e as demais ações variáveis com seus valores reduzidos de combinação de acordo com a NBR 8681.

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + F_{q1exc} + \gamma_q \sum \psi_{oj} F_{qjk} + \gamma_{eq} \psi_{0\epsilon} F_{eqk}$$

#### 4.2.2 Combinações de Serviço:

As combinações de serviço são classificadas de acordo com a sua permanência na estrutura e devem ser verificadas como estabelecido a seguir:

- a) **Quase permanentes:** Podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado limite de deformações excessivas.

$$F_{d,ser} = \sum F_{gik} + \sum \psi_{2j} F_{qjk}$$

- b) **Freqüentes:** Se repetem muitas vezes durante o período de vida da estrutura e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado limite de formação de fissuras, de abertura de fissuras e de vibrações excessivas. Podem também ser consideradas na verificação do estado limite de deformações excessivas decorrentes de vento ou temperatura que podem comprometer as vedações.

$$F_{d,ser} = \sum F_{gik} + \psi_1 F_{q1k} + \sum \psi_{2j} F_{qjk}$$

- c) **Raras:** Ocorrem algumas vezes durante o período de vida da estrutura e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado limite de formação de fissuras.

$$F_{d,ser} = \sum F_{gik} + F_{q1k} + \sum \psi_{1j} F_{qjk}$$

## 4.3 MATERIAIS

A seguir serão descritas as propriedades dos materiais e suas especificações de acordo com as normas específicas para cada material. Para as propriedades de concreto armado e concreto simples será utilizada a NBR 6118 de 2003.

### 4.3.1 CONCRETO

Segundo a NBR 6118, a mesma se aplica apenas a concretos compreendidos nas classes de resistência do grupo I, estas classes estão indicadas na NBR 8953, ou seja, até C50.

E mais, a classe C20, ou superior, se aplica a concreto com armadura passiva e a classe C25 se aplica a concreto com armadura ativa. A classe C15 só se aplica a fundações, conforme NBR 6122, e obras provisórias.

A seguir serão apresentadas algumas propriedades físicas deste material segundo a NBR 6118 de 2003.

#### 4.3.1.1 Massa Específica:

A NBR 6118 trata de concreto com massa específica normal o que consiste em concretos com massa específica ( $\rho_c$ ) depois de secos compreendida entre  $2000\text{kgf/m}^3$  e  $2800\text{kgf/m}^3$ .

Porém, se não existirem dados sobre a massa específica real, para a realização dos cálculos poderá se adotar o valor de  $2400\text{kgf/m}^3$  para concreto simples e  $2500\text{kgf/m}^3$  para concreto armado.

Quando a massa específica real do concreto simples for conhecida, para determinar a massa específica do concreto armado, considera-se a massa específica do concreto simples acrescida de  $100\text{kgf/m}^3$  a  $150\text{kgf/m}^3$ .

#### 4.3.1.2 Coeficiente de Dilatação Térmica:

Para a análise estrutural o coeficiente de dilatação térmica poderá ser admitido com sendo igual a  $10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

### 4.3.1.3 Resistência à Compressão:

A norma de referência baseia-se nas NBR 5738 e NBR 5739 para a confecção dos corpos de prova cilíndricos e execução do ensaio.

Quando não forem indicadas as idades, as resistências referem-se à idade de 28 dias.

### 4.3.1.4 Resistência à Tração:

A resistência à tração indireta  $f_{ct,sup}$  e a resistência à tração na flexão  $f_{ct,f}$  devem ser obtidas em ensaios realizados segundo a NBR 7222 e a NBR 12142.

A resistência a tração direta  $f_{ct}$  pode ser considerada igual a  $0,9f_{ct,sup}$  ou  $0,7f_{ct,inf}$  ou, na falta de ensaios para a obtenção dos valores de  $f_{ct,sup}$  e  $f_{ct,inf}$ , pode ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das equações a seguir:

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m}$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m}$$

Onde  $f_{ct,m}$  e  $f_{ck}$  são expressos em mega pascal.

### 4.3.1.5 Resistência à Fadiga:

- a) **Resistência à Fadiga à Compressão:** A verificação do concreto à compressão é feita através da expressão abaixo a qual analisa o nível máximo de tensão e o gradiente de tensões.

$$\eta_c \gamma_f \sigma_{c,max} \leq f_{cd,fad}$$

$$f_{cd,fad} = 0,45 f_{cd}$$

$$\eta_c = \frac{1}{1,5 - 0,5(|\sigma_{c1}|/|\sigma_{c2}|)}$$

Onde:

$\eta_c$  é um fator que considera o gradiente de tensões de compressão no concreto.

$|\sigma_{c1}|$  é o menor valor, em módulo, da tensão de compressão a uma distância não maior que 300mm da face sob a mesma combinação relevante de cargas.

$|\sigma_{c2}|$  é o maior valor, em módulo, da tensão de compressão a uma distância não maior que 300mm da face sob a mesma combinação de cargas usada para o cálculo de  $|\sigma_{c1}|$ .

- b) **Resistência à Fadiga à Tração:** A verificação da fadiga à tração no concreto é feita pela expressão:

$$\begin{aligned}\gamma_f \sigma_{ct,max} &\leq f_{ctd,fad} \\ f_{ctd,fad} &= 0,3 f_{ctd,inf}\end{aligned}$$

Onde:

$f_{ctd,fad}$  é a resistência de cálculo à fadiga.

#### 4.3.1.6 Limites de Deformação:

As deformações limites determinadas pela NBR 6118 dependem do tipo de carregamento, para flexão simples e flexão composta, as deformações na fibra mais comprimida limita-se a 3,5‰ e a fibra mais tracionada quando o concreto resistir ao carregamento sem iniciar o processo de fissuração limita-se a 0,35‰.

Para compressão com pequena excentricidade, na fibra distante 0,43h da fibra mais comprimida, a deformação limite é de 2,0‰.

Para tração com pequenas excentricidades, na fibra distante 0,43h da fibra mais tracionada, a deformação limite é de 0,2‰.

#### 4.3.1.7 Módulo de Elasticidade:

Segundo as normas que tratam desse assunto são considerados dois valores de módulo de elasticidade, o tangencial e o secante.

- a) **Módulo de elasticidade Secante:**

Segundo a NBR 8522 o módulo de elasticidade secante é o coeficiente angular da reta que passa pela tensão de 0,5MPa e pela tensão considerada no ensaio.

Segundo a NBR 6118, quando não forem realizados ensaios para a determinação da curva tensão-deformação do concreto e não existirem dados mais precisos sobre o concreto na idade de 28 dias, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade secante através da expressão:

$$E_{cs} = 0,85E_{ci}$$

#### **b) Módulo de Elasticidade Tangente Inicial**

Segundo a NBR 8522, Módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente à origem ou inicial, que é considerado equivalente ao módulo de deformação secante ou cordal entre 0,5MPa e 30%  $f_c$

Porém, a NBR 6118, especifica que na falta de dados sobre o material considera-se a seguinte expressão:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}$$

#### **4.3.1.8 Coeficiente de Poisson e Módulo de elasticidade Transversal:**

A NBR 6118 recomenda que para tensões de compressão menores que 0,5 $f_c$  e tensões de tração menores que  $f_{ct}$  o coeficiente de Poisson  $\nu$  pode ser tomado como igual a 0,2 e o módulo de elasticidade transversal igual a 0,4 $E_{cs}$ .

#### **4.3.2 AÇO PARA ARMADURA PASSIVA**

Nos projetos de estruturas de concreto segundo a NBR 6118 devem-se usar aços classificados pela NBR 7480 nas seguintes categorias: CA-25, CA-50 e CA-60. Assim como os diâmetros e seções transversais nominais das barras.

#### 4.3.2.1 Massa Específica:

A NBR 6118 recomenda adotar o valor de 7850kgf/m<sup>3</sup> para aço de armadura passiva para concreto armado.

#### 4.3.2.2 Coeficiente de Dilatação Térmica:

Para temperatura entre -20°C e 150°C pode ser considerado o valor de 10-5/°C.

#### 4.3.2.3 Resistência à Compressão e à Tração:

Os limites de resistência do aço para armadura passiva tanto para tração quanto para compressão são os mesmos e estão indicados na Tabela 2 da NBR 7480, esta tabela é mostrada a seguir:

**Tabela 2 – Limites de Resistência dos aços.**

Categoria	Ensaio de tração (valores mínimos)			Ensaio de Dobramento a 180°		Aderência
	Resistência característica de escoamento $f_y$ (MPa)	Limite de Resistência $f_{st}$ (MPa)	Alongamento em 10 $\phi$	Diâmetro do pino (mm)		Coeficiente de conformação superficial mínimo para $\phi \geq 10\text{mm}$ $\eta$
				$\phi < 20$	$\phi \geq 20$	
CA-25	250	1,20 $f_y$	18	2 $\phi$	4 $\phi$	1,0
CA-50	500	1,10 $f_y$	8	4 $\phi$	6 $\phi$	1,5
CA-60	600	1,05 $f_y$	5	5 $\phi$	-	1,5

#### 4.3.2.4 Resistência à Fadiga:

A verificação da fadiga na armadura é garantida desde que a variação máxima de tensão para a combinação frequente não ultrapasse os limites de variação de tensão especificados na Tabela 23.3 da NBR 6118, de acordo com a expressão abaixo.

$$\gamma_f \Delta \sigma_{Ss} \leq \Delta f_{sd,fad}$$

**Tabela 3 – Limites de variação de tensão para verificação à fadiga.**

Valores $\Delta f_{sd,fad,min}$ para $2 \times 10^6$ ciclos Mpa									
Armadura passiva, aço CA-50									
$\phi$ mm Caso	10	12,5	16	20	22	25	32	40	Tipo
Barras retas ou dobradas com $D \geq 25 \phi$	190	190	190	185	180	175	165	150	T1
Barras retas ou dobradas com: $D < 25 \phi$ $D = 5 \phi < 20\text{mm}$ $D = 8 \phi \geq 20\text{mm}$	105	105	105	105	100	95	90	85	T1
Estribos $D = 8 \phi \leq 20\text{mm}$	85	85	85	-	-	-	-	-	T1
Ambiente Marinho Classe IV	65	65	65	65	65	65	65	65	T4
Barras soldadas (incluindo solda por ponto ou das extremidades) e conectores mecânicos	85	85	85	85	85	85	85	85	T4

#### 4.3.2.5 Limites de Deformação:

Em regime de tração o limite de deformação é de 10‰ e em regime de compressão o limite é 3,5‰ que é a deformação máxima suportada pelo concreto em compressão. O limite máximo de 10‰ em regime de tração é dado para garantir que não haja deformações excessivas, porém este não é o limite de ruptura do material.

#### 4.3.2.6 Módulo de Elasticidade:

Não tendo valores fornecidos pelo fabricante ou obtidos em ensaios, o módulo de elasticidade do aço pode ser admitido igual a 210GPa.

## CAPÍTULO 5

### Descrição do programa desenvolvido.

---

O programa desenvolvido utilizou os algoritmo de análise e interface gráficas desenvolvidos por Queiroz (2008). Este programa utilizava elementos finitos de pórtico espacial baseados na teoria de viga de Euller-Bernoulli e considerava somente elementos com seção transversal constante.

A interface desenvolvida em Queiroz (2008) utilizava programação estruturada e classes de objetos gráficos da plataforma MATLAB na qual o programa foi desenvolvido. O programa desenvolvido no presente trabalho, chamado *BridgeLab*, foi um aperfeiçoamento do programa desenvolvido por Queiroz (2008).

A seguir serão descritas as principais alterações (avanços) feitas no programa.

No algoritmo de análise o elemento finito utilizado no *BridgeLab* é um elemento de pórtico espacial baseado na teoria de viga de Timoshenko e desenvolvido através do método das forças. Através do método das forças pode-se obter a matriz de rigidez exata (a menos de erros de integração) de uma barra com qualquer tipo de variação de seção.

Na interface gráfica, as janelas de entrada de dados sofreram algumas modificações e outras foram criadas, tais como a de entrada de dados de casos de carga, de aparelhos de apoio, de aplicações de deslocamentos, cargas e massas nodais, entre outras. Essas janelas serão mostradas posteriormente.

A principal mudança na interface gráfica corresponde à utilização de classes de objetos para armazenar e gerar os dados da estrutura.

Foram criadas duas classes, a classe *Nos*, que cria os nós da estrutura e armazena suas propriedades e a classe *Barra* que cria os elementos da estrutura e também armazenas os seus dados.

As duas classes de elementos criadas utilizam a classe de elementos gráficos do MATLAB chamada *line* que possui propriedades gráficas como cor e posição na tela, mas a principal propriedade são as coordenadas definidas pelo usuário.

Os diagramas de classe utilizadas no BridgeLab são mostrados a seguir.



**Figura 5-1 – Diagrama da Classe *Nos*.**

Na Figura 5-1 são apresentadas as propriedades e as funções específicas da classe *Nos*.

Essas funções realizam operações específicas deste tipo de elemento. A seguir são descritas as operações realizadas por cada função.

**set** – atribui valor a propriedades especificada.

**get** – captura o valor da propriedade especificada.

**display** – mostra na tela de comando as informações do elemento.

**DesenhaNo** – desenha na interface do *BridgeLab* algumas propriedades como restrições, deslocamentos, cargas e massas do elemento.

**delete** – apaga o elemento.



**Figura 5-2 – Diagrama da Classe *Barra*.**

A Figura 5-2 mostra o diagrama da classe *Barra*.

De forma análoga a classe *Nos*, a classe *Barra* possui propriedades e algumas funções. As funções serão descritas a seguir.

**set** – atribui valor a propriedades especificada.

**get** – captura o valor da propriedade especificada.

**display** – mostra na tela de comando as informações do elemento.

**DesenhaBarra** – desenha na interface do *BridgeLab* algumas propriedades como cargas e massas, distribuídas e concentradas, do elemento.

**delete** – apaga o elemento.

## 5.1 Telas do Programa

Nas seções seguintes, serão apresentadas as telas da interface gráfica do programa *BridgeLab* e suas funções.

### 5.1.1 Telas do Programa

A Figura 5-3 mostra a tela principal do programa. Nela são definidos os nós e elementos que constituem a estrutura e também onde são visualizados os resultados das análises.

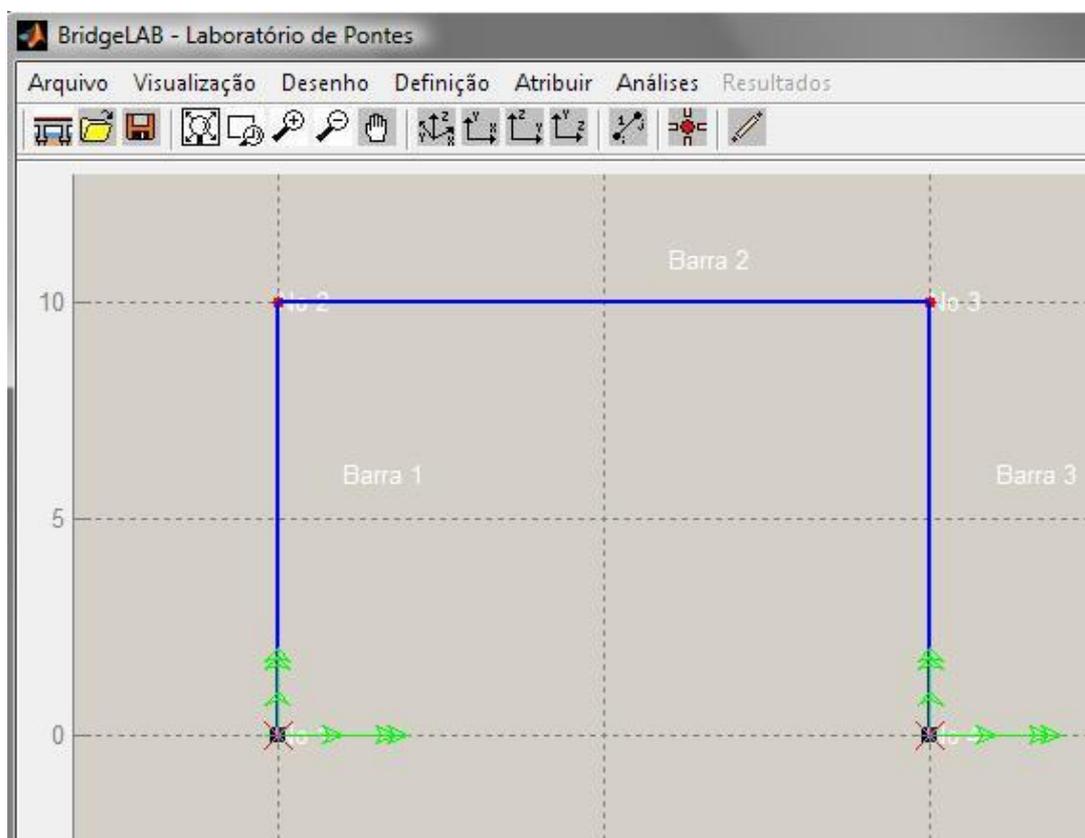
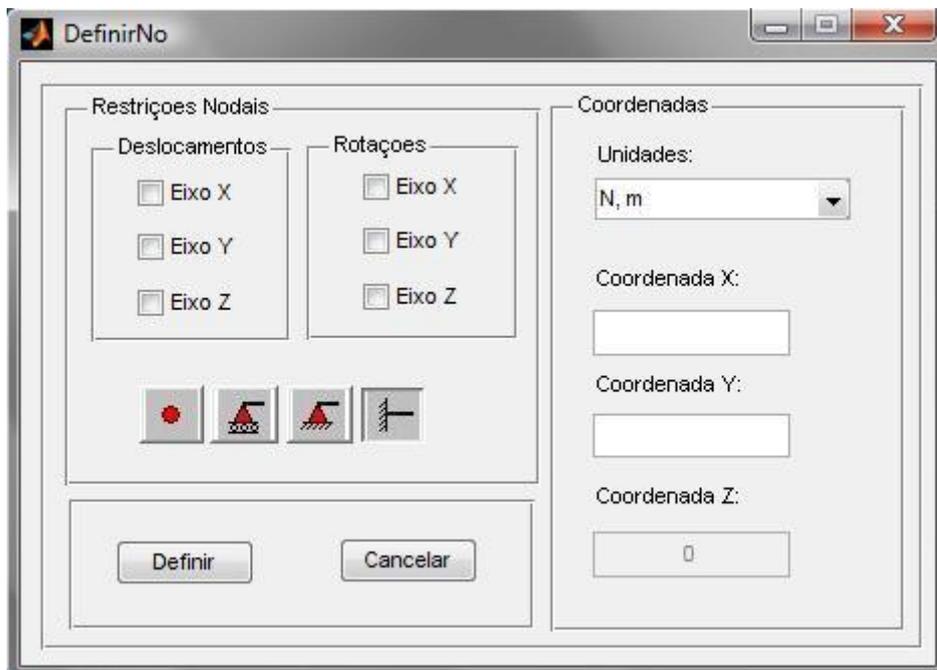


Figura 5-3 – Tela Principal do Programa.

### 5.1.2 Geração de nós

Para criar a estrutura é necessário primeiramente criar os nós da mesma e isso pode ser feito informando as coordenadas e as restrições nodais através da interface

mostrada na Figura 5-4 ou, informam-se as coordenadas através do *mouse* e posteriormente se atribui restrições nodais da mesma interface da Figura 5-4.



**Figura 5-4 – Interface de criação de nós.**

A definição dos nós através do mouse conta com o auxílio de uma ferramenta que interpreta as linhas de grade da tela principal do programa. Essas linhas de grade se ajustam automaticamente de acordo com a dimensão dos eixos. Para isso foi adotado um critério de precisão.

Assim, sempre que as coordenadas capturadas como *mouse* forem próximas das linhas de grade dos eixos é feito um teste para determinar se a coordenada será a capturada pelo *mouse* ou as coordenadas das linhas de grade. Dessa forma, o usuário pode ajustar o *zoom* da tela de tal forma que as coordenadas das linhas de grade coincidam com as coordenadas que ele deseja criar o nó.

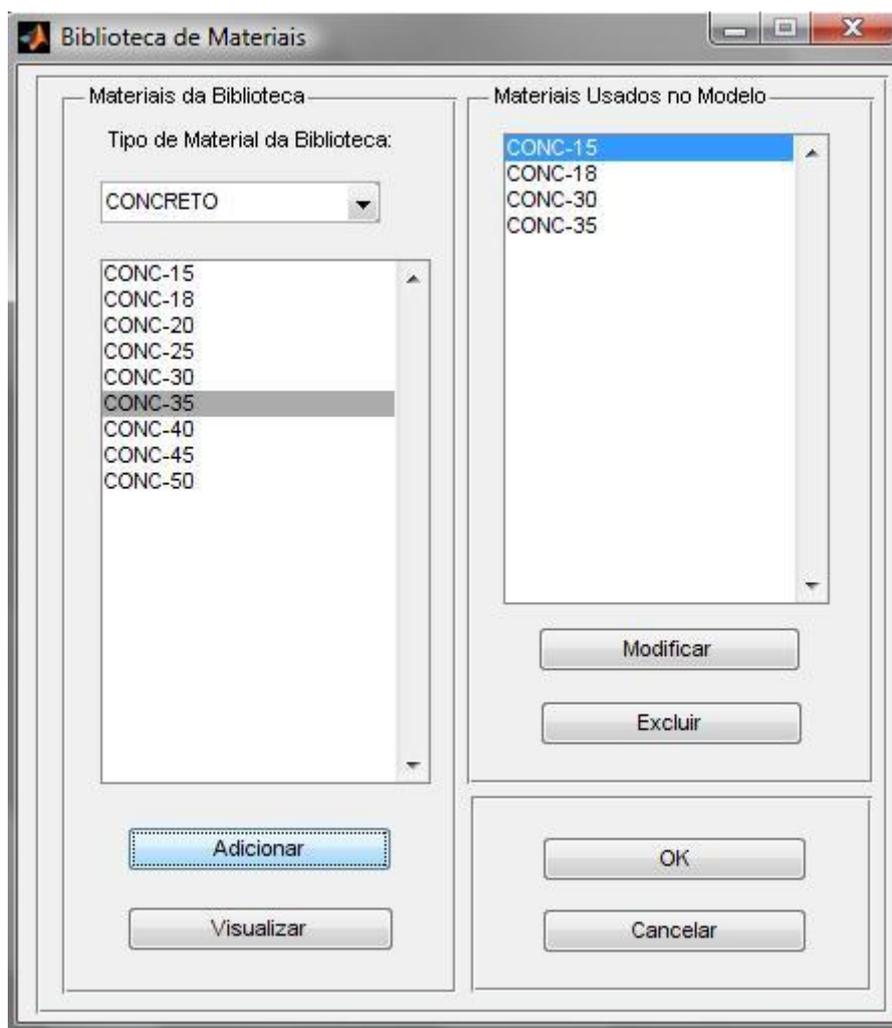
### 5.1.3 Geração de nós

Os elementos são criados selecionando dois nós.

Após a criação do modelo geométrico da estrutura é necessário que sejam definidas algumas propriedades, tais como: materiais e seções transversais.

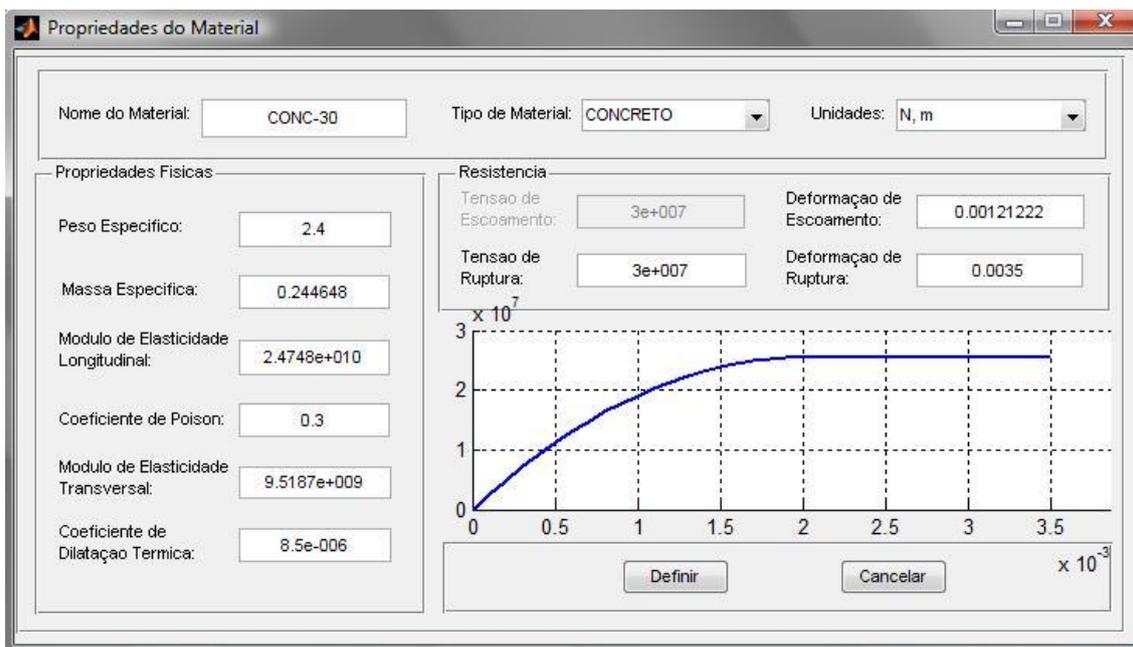
### 5.1.4 Materiais

Para definir um material do qual é constituído o elemento, o usuário pode utilizar o banco de dados disponível no programa que conta com informações de diversos tipos de materiais, entre eles: concreto, aço, alumínio e neoprene. O banco de dados de material é mostrado na Figura 5-5.



**Figura 5-5 – Banco de dados de materiais.**

O usuário pode criar um novo material através de um material do banco de dados alterando suas propriedades. A Figura 5-6 mostra a interface onde o usuário pode visualizar e alterar as propriedades dos materiais.



**Figura 5-6 – Propriedades dos materiais.**

É possível notar que existem duas listas de materiais na interface da Figura 5-5. A lista da esquerda é dos materiais encontrados no banco de dados do programa e a da direita são os materiais adicionados ao modelo da estrutura.

Quando o usuário adiciona um material ao modelo, é feita uma cópia do material selecionado no banco de dados. Assim, as informações contidas no banco de dados não são alteradas, mas somente são alteradas as informações que forem copiadas para o modelo.

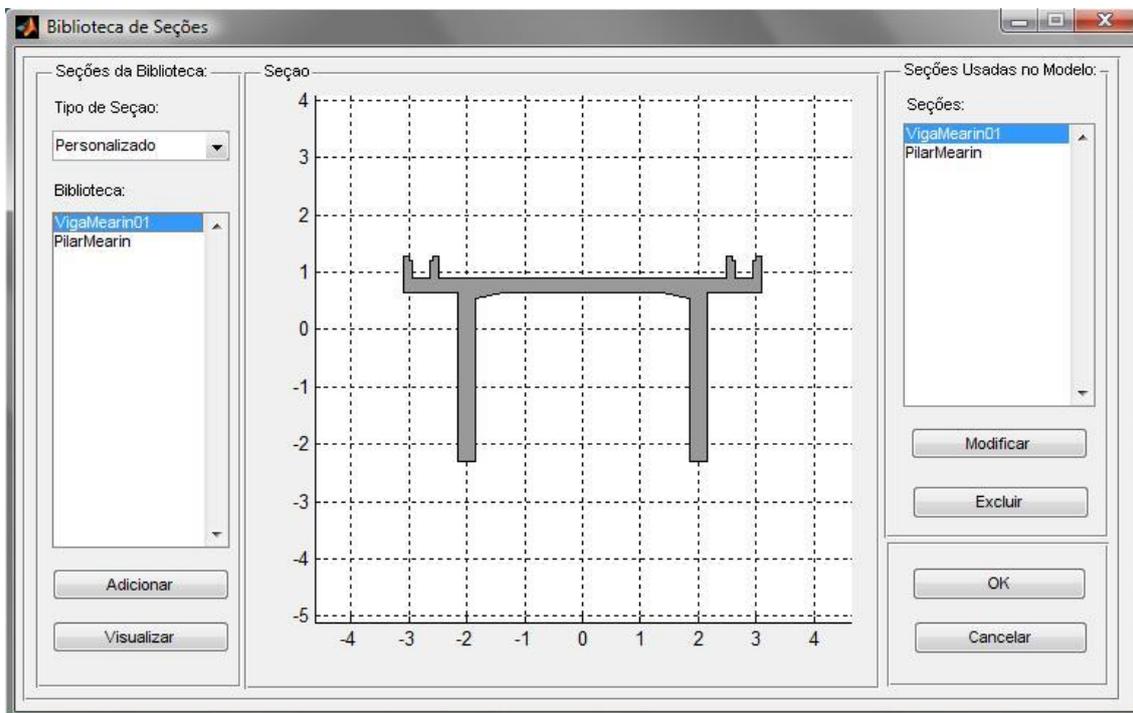
As propriedades dos materiais que constam no banco de dados foram extraídas das normas brasileiras referentes a concreto e aço e as propriedades de estruturais encontram-se no site do laboratório de mecânica da UFMG.

### 5.1.5 Seções

Após definir o material, o usuário deve definir as seções transversais do elemento. Essas seções são as que se encontram nos nós do elemento, nó I e nó J, definindo assim a variação de seção do elemento.

Tal qual para materiais, o programa possui um banco de dados de seções, e da mesma forma é feita uma cópia das propriedades da seção selecionada no banco de dados para o modelo. A Figura 5-7 mostra a interface de banco de dados de seções. Esta

interface acessa as seções do banco de dados de acordo com o tipo de seção escolhido pelo usuário.



**Figura 5-7 – Banco de dados de seções.**

A formulação do elemento finito utilizado no programa permite que se utilize qualquer variação de seção. Porém, é necessário que essas seções sejam do mesmo tipo (com a mesma topologia), como por exemplo, retangulares, circulares, tipo “T”, tipo “I”, tipo “U”, tipo PI ou duplo “T” e personalizado.

A Figura 5-8 mostra as propriedades de uma seção do tipo personalizado. Neste tipo de seção são informados os vértices da poligonal que formam a seção. Os outros tipos de seção são definidos através de parâmetros que dependendo do tipo de seção. Por exemplo, para definir uma seção retangular é necessário informar ao programa a dimensão da base e da altura da seção.

Na interface de propriedades da seção, parte dos dados referem-se as armaduras longitudinais da seção, as quais são definidas informando as coordenadas iniciais e finais da faixa de amadura, o diâmetro, o tipo de aço e o número de barras.

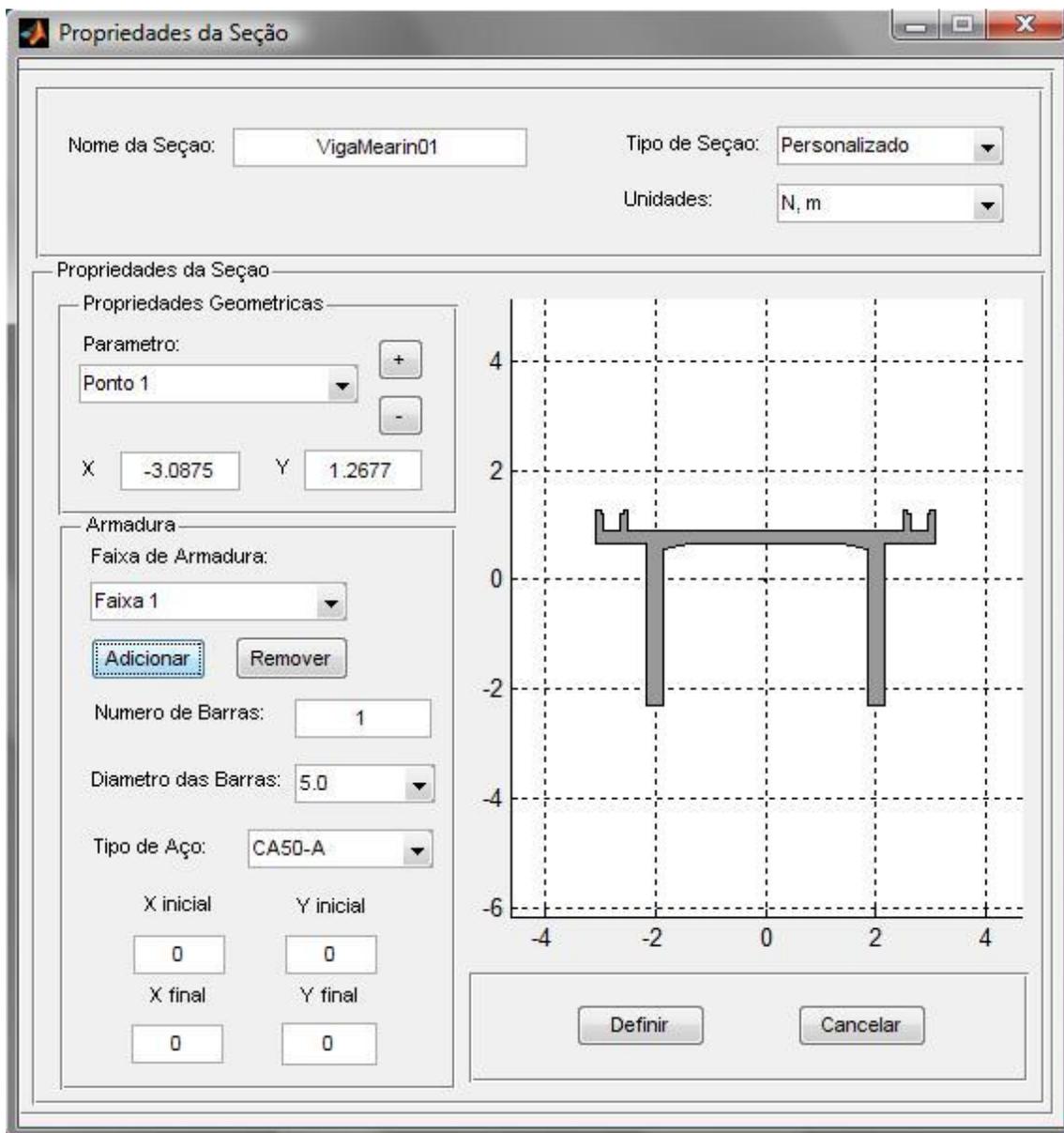


Figura 5-8 – Propriedades das seções.

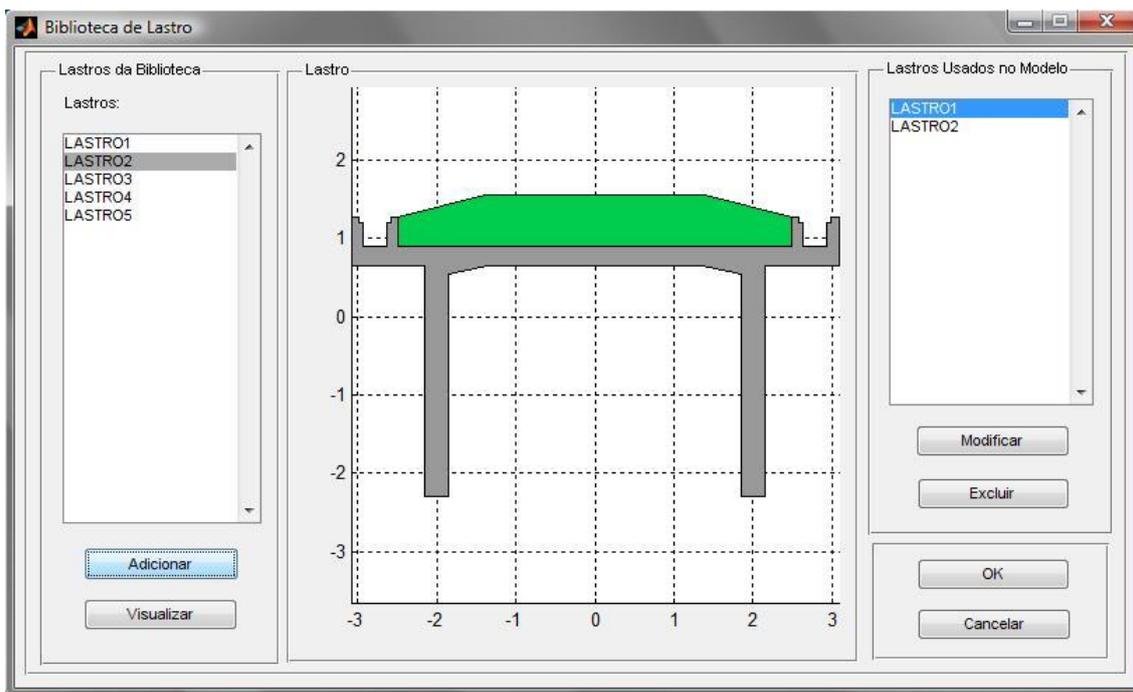
### 5.1.6 Lastros

Em ferrovias os trilhos são colocados sobre dormentes e por sua vez são colocados sobre o lastro que geralmente é composto por brita. Na análise deve ser considerado o peso e a massa desses elementos.

Para facilitar a modelagem da estrutura e evitar erros no calculo das cargas e massa do lastro, o mesmo é considerado como uma propriedade do elemento referente ao tabuleiro, da mesma que a sua seção transversal.

Desta forma o lastro é definido através de parâmetros que definem a geometria do mesmo, ou seja, parâmetros que definem a seção transversal do lastro.

A Figura 5-9 mostra a interface de banco de dados de lastro.



**Figura 5-9 – Banco de dados de lastro.**

Na Figura 5-10 é apresentada a interface de banco de dados de lastro.

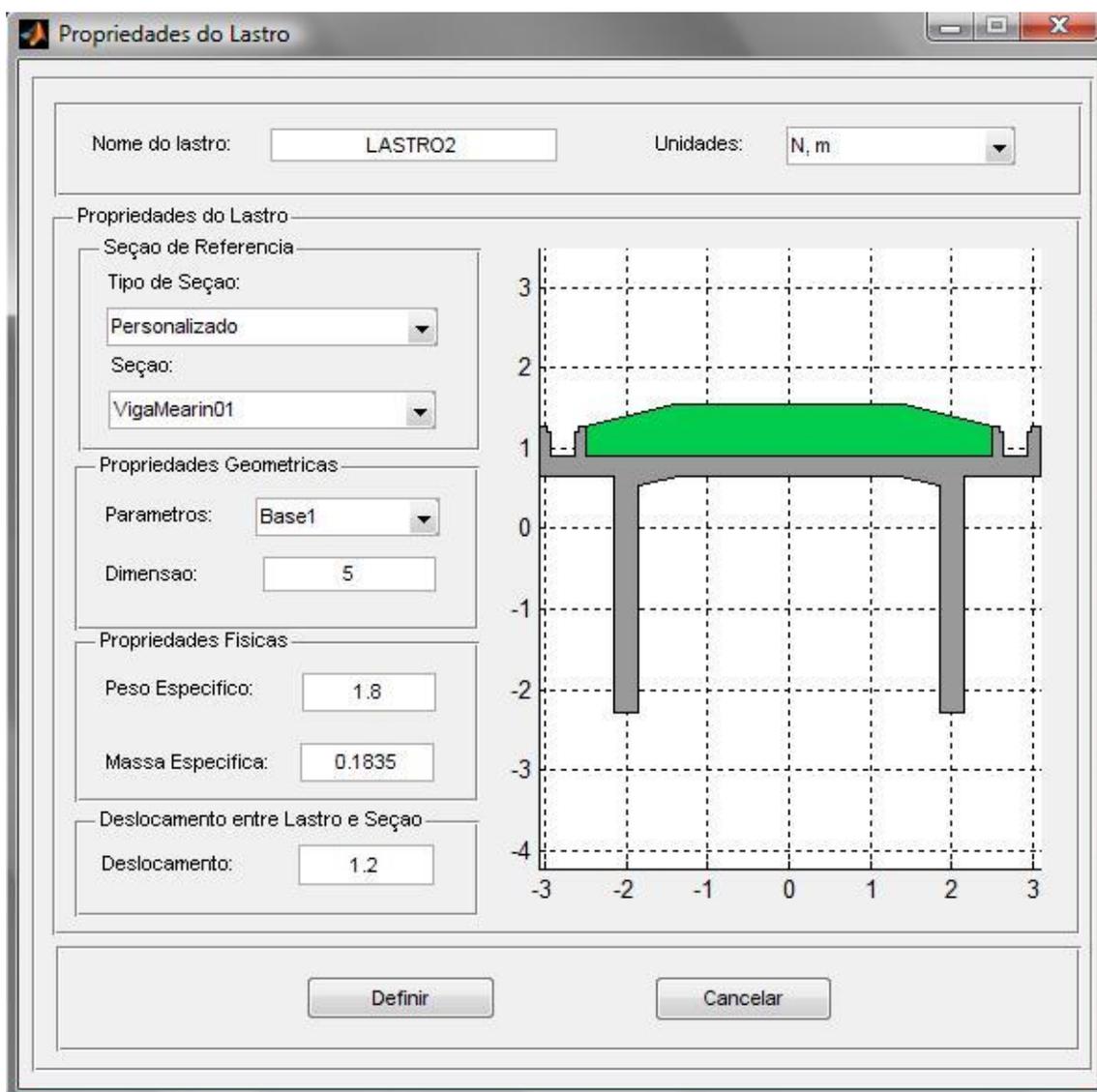


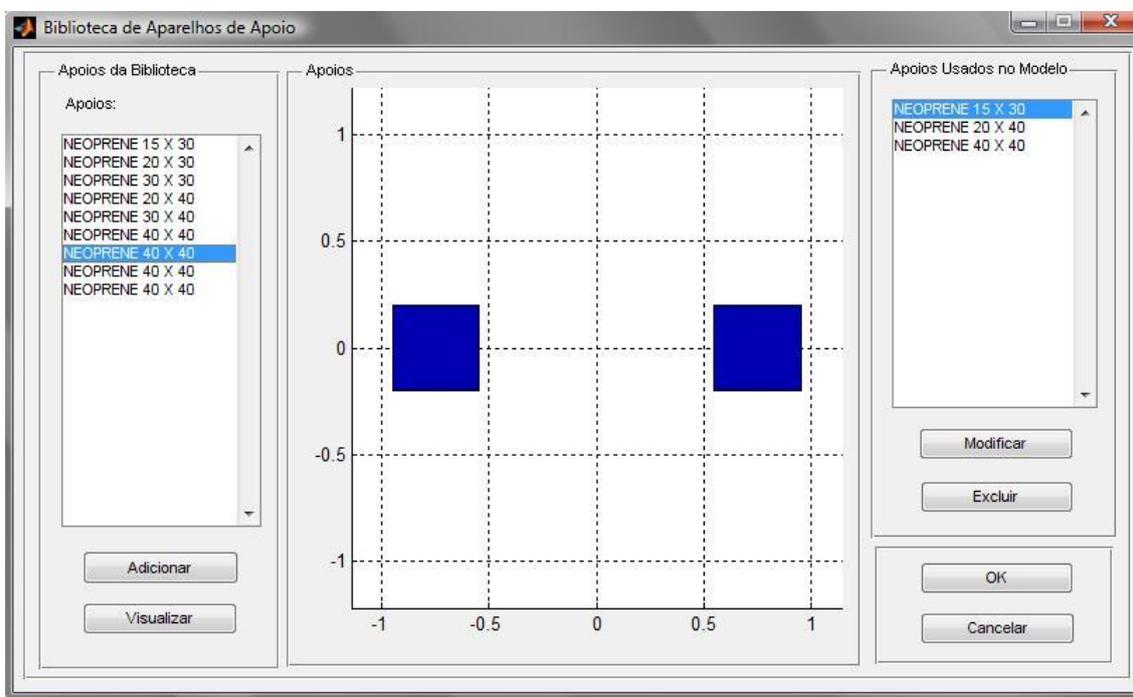
Figura 5-10 – Propriedades dos lastros.

### 5.1.7 Aparelhos de apoio

Na revisão bibliográfica foi citado que em alguns casos a ligação entre a superestrutura e a mesoestrutura é feita através de aparelhos de apoio. Dentre os diversos tipos de aparelhos de apoio existentes, os aparelhos de apoio de *neoprene fretado* têm sido largamente utilizados em pontes ferroviárias.

Assim, resolveu-se criar um tipo especial de elemento que representasse as propriedades desses aparelhos de apoio. Esses elementos são considerados na análise como elementos de mola com rigidez nos seis graus de liberdade dos nós.

Os aparelhos de apoio são criados selecionando os nós que o definem e suas rigidezes são calculadas a partir das propriedades geométricas das almofadas e das propriedades do material, *neoprene*.



**Figura 5-11 – Banco de dados de aparelhos de apoio.**

Dependendo do como for feita a modelagem da estrutura e da quantidade de aparelhos de apoio em um elemento estrutural, a rigidez de duas ou mais almofadas pode ter que ser representada por um só elemento.

Devido a esse fato os aparelhos de apoio podem ser constituídos por mais de uma almofada. Sendo que até três almofadas as mesmas são consideradas alinhadas em um dos eixos e quando forem constituídas por quatro almofadas, número limite considerado pelo programa, as almofadas são dispostas na forma de um retângulo, devendo ser informadas as distâncias entre as almofadas. Todas essas propriedades são visualizadas e alteradas na interface mostrada na Figura 5-12.

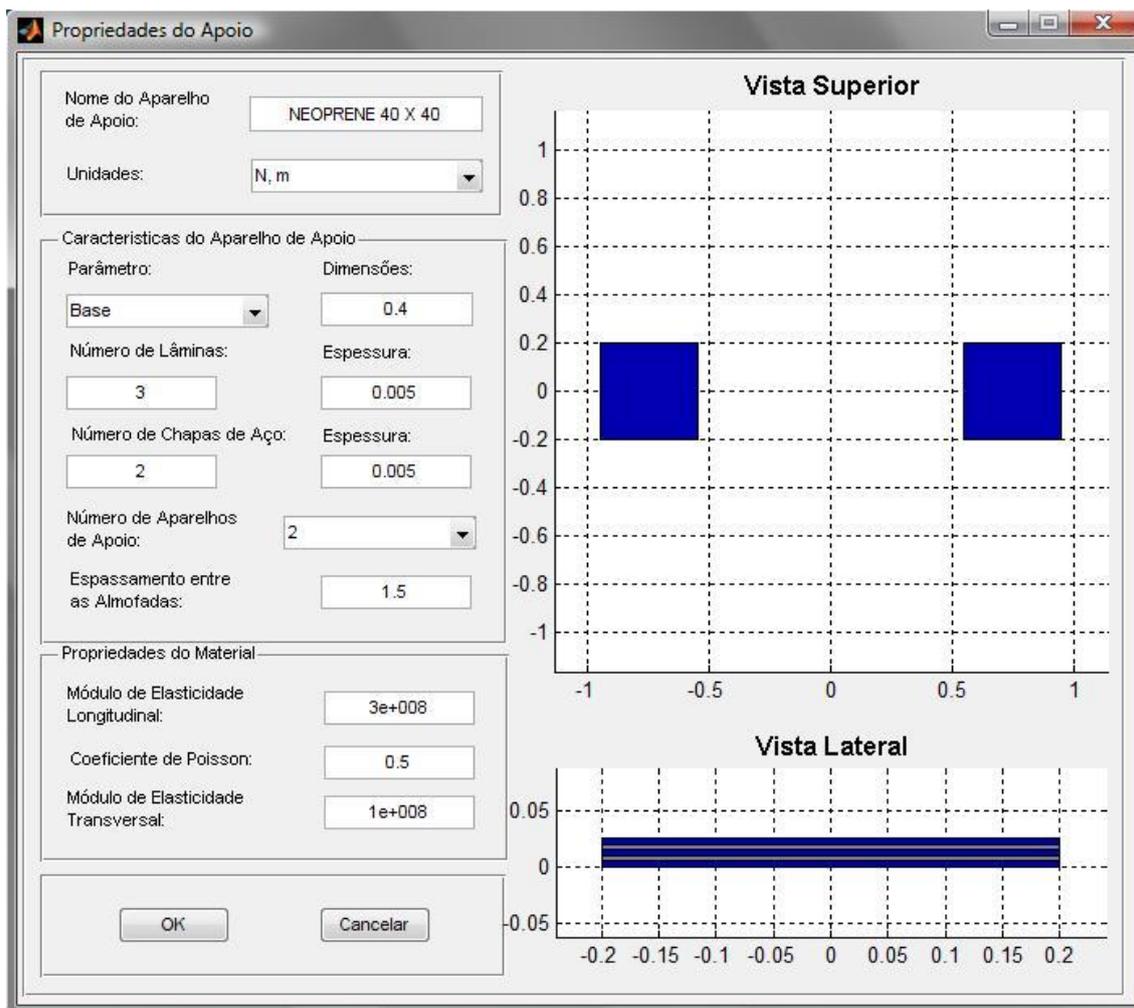
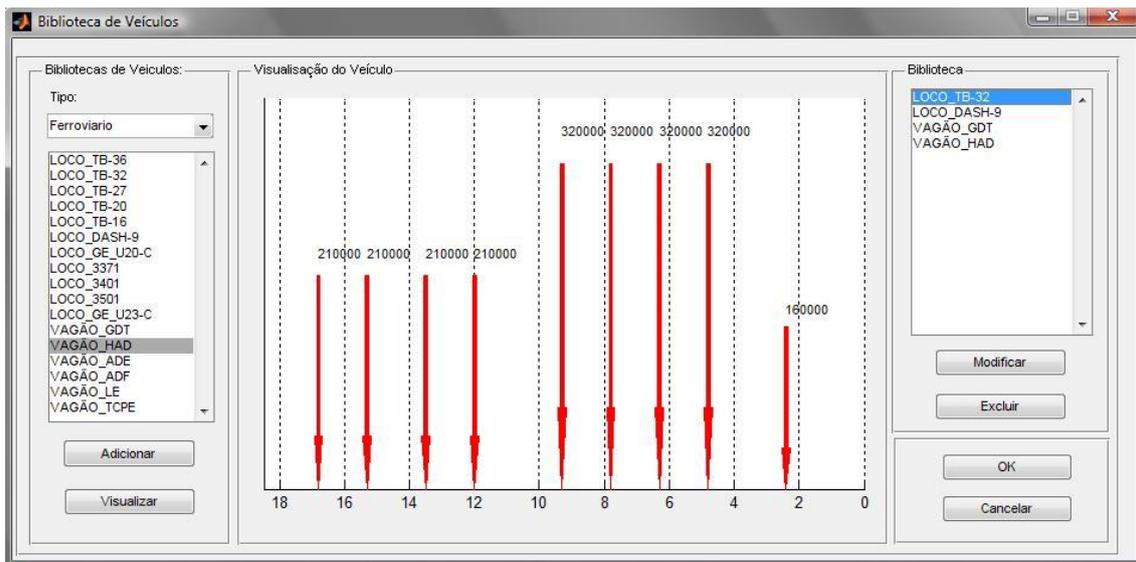


Figura 5-12 – Propriedades dos aparelhos de apoio.

### 5.1.8 Veículos

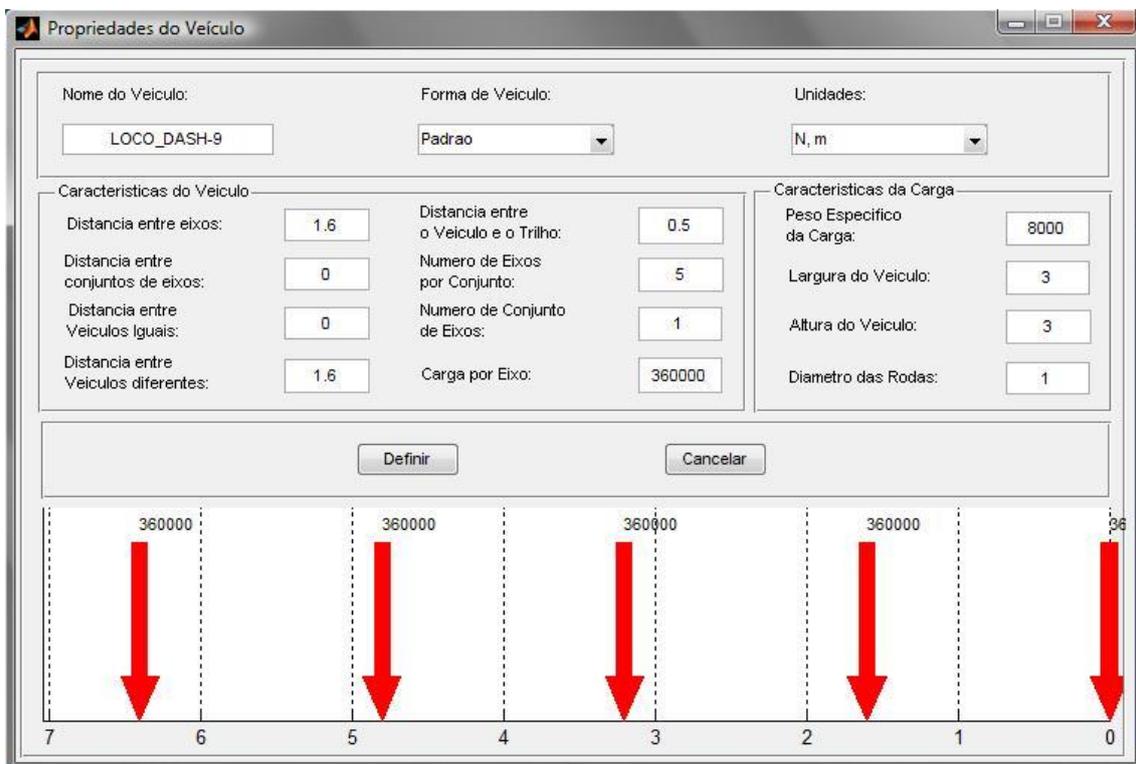
Uma das principais ferramentas desenvolvidas para o programa é a geração automática das cargas móveis referentes ao trem-tipo.

Para a determinação do trem-tipo o usuário precisa determinar os veículos que formam o trem-tipo para isso é utilizada a interface mostrada na Figura 5-14 e Figura 5-15. O programa possui um banco de dados com os principais veículos rodoviários e ferroviários usados nas rodovias e ferrovias brasileiras. O banco de dados dos veículos é apresentado na interface da Figura 5-13.



**Figura 5-13 – Propriedades dos aparelhos de apoio.**

No programa os veículos são tratados de duas formas, veículos com espaçamentos iguais entre eixos, denominado veículo padrão, e veículos com espaçamentos diferentes entre os eixos, denominado veículo geral.



**Figura 5-14 – Propriedades dos aparelhos de apoio.**

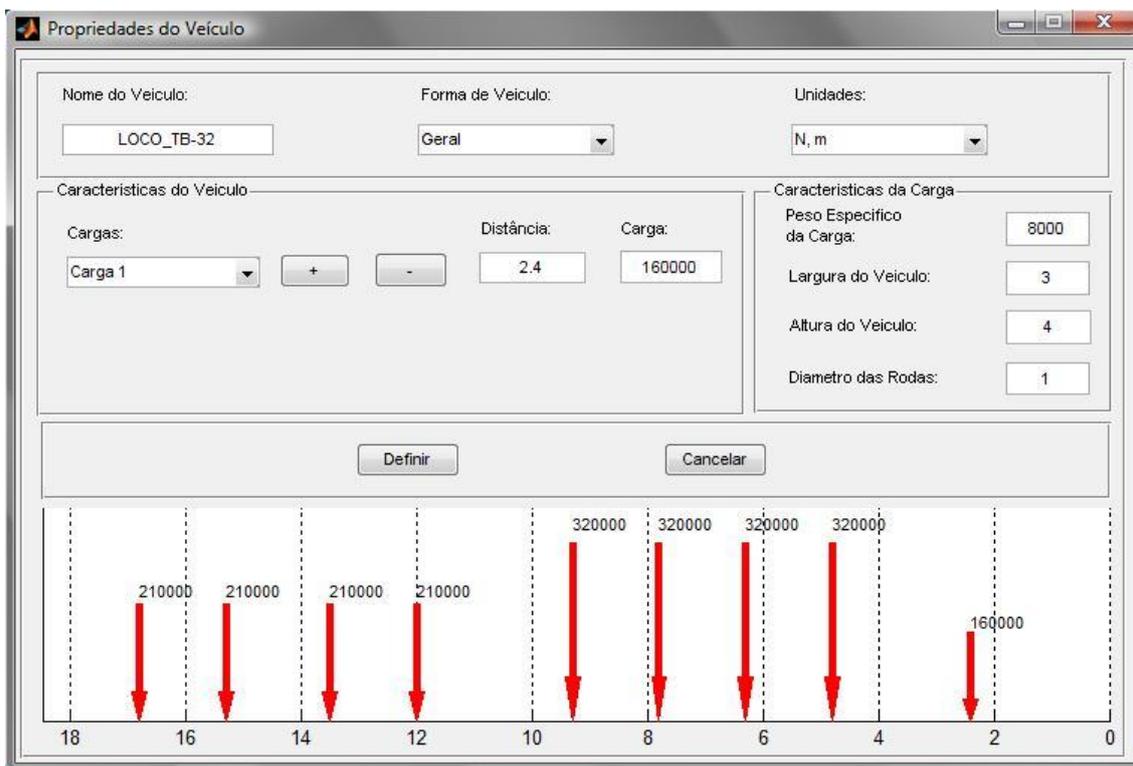


Figura 5-15 – Propriedades dos aparelhos de apoio.

### 5.1.9 Trem-Tipo

Os trens-tipos são formados através dos veículos criados pelo usuário, para isso é informada a disposição dos diversos veículos que compõem o trem-tipo e a quantidades de cada veículo. Feito isso o programa se encarrega de gerar o vetor de cargas do trem-tipo.

A Figura 5-16 mostra a interface onde são editadas as informações para gerar o trem-tipo.

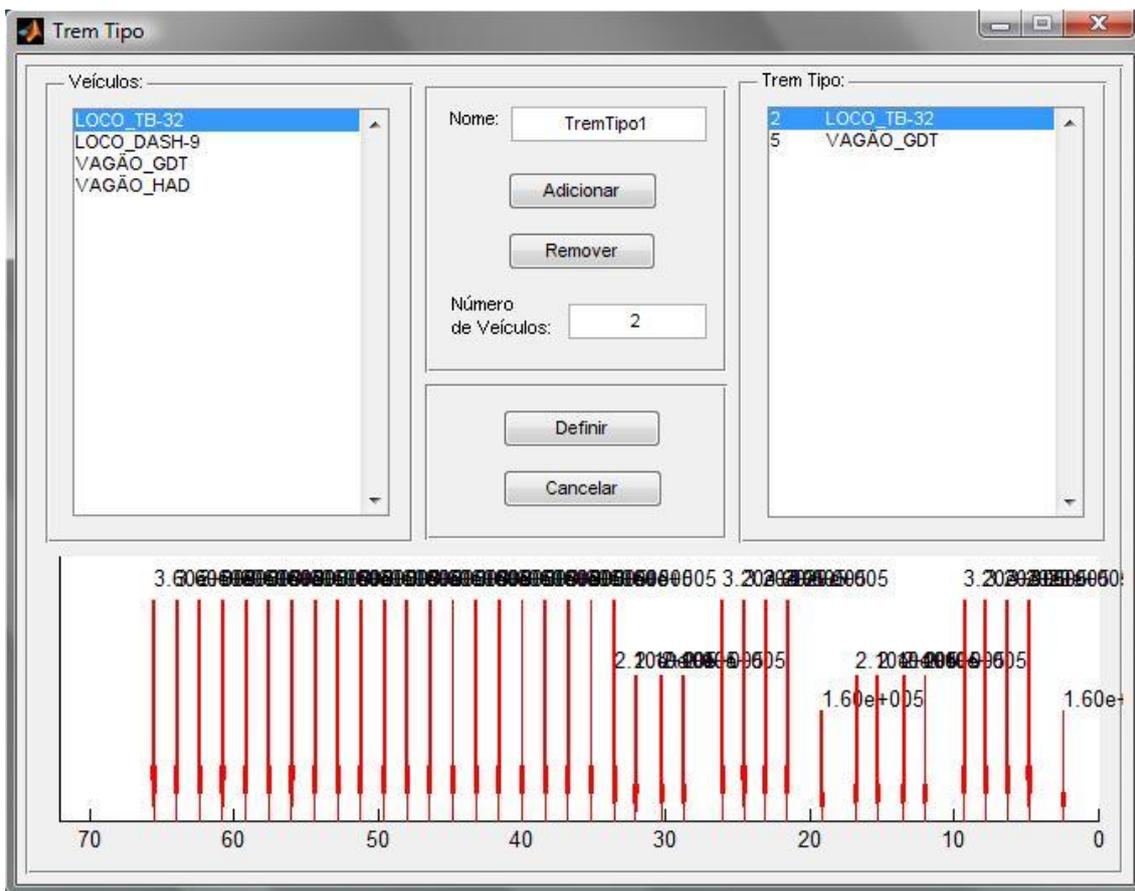


Figura 5-16 – Propriedades dos aparelhos de apoio.

## CAPÍTULO 6

### Verificação das seções dos elementos.

A verificação dos elementos é feita através do software desenvolvido em um núcleo de pesquisa da universidade de federal do Pará chamado NiCAE, Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia. Este software é chamado *SecLab*, Laboratório de Seções, e foi desenvolvido em conjunto pelo autor do presente trabalho e seu orientador.

O *SecLab* trabalha de forma integrada com o *BridgeLab* utilizando os resultados das análises e as propriedades de seções transversais e de materiais definidos pelo usuário na geração do modelo da estrutura no *BridgeLab*.

A Figura 6-1 mostra a tela principal do *SecLab*.

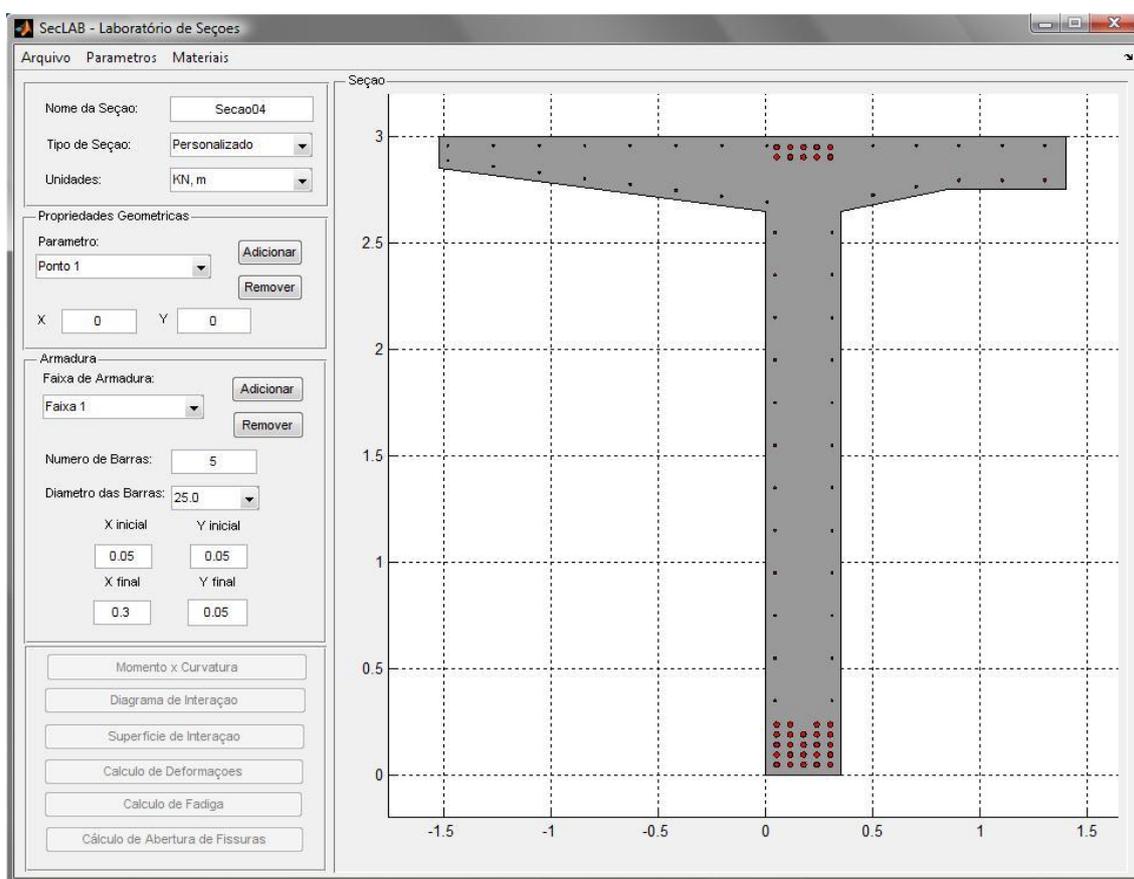


Figura 6-1 – Tela principal do SecLab.

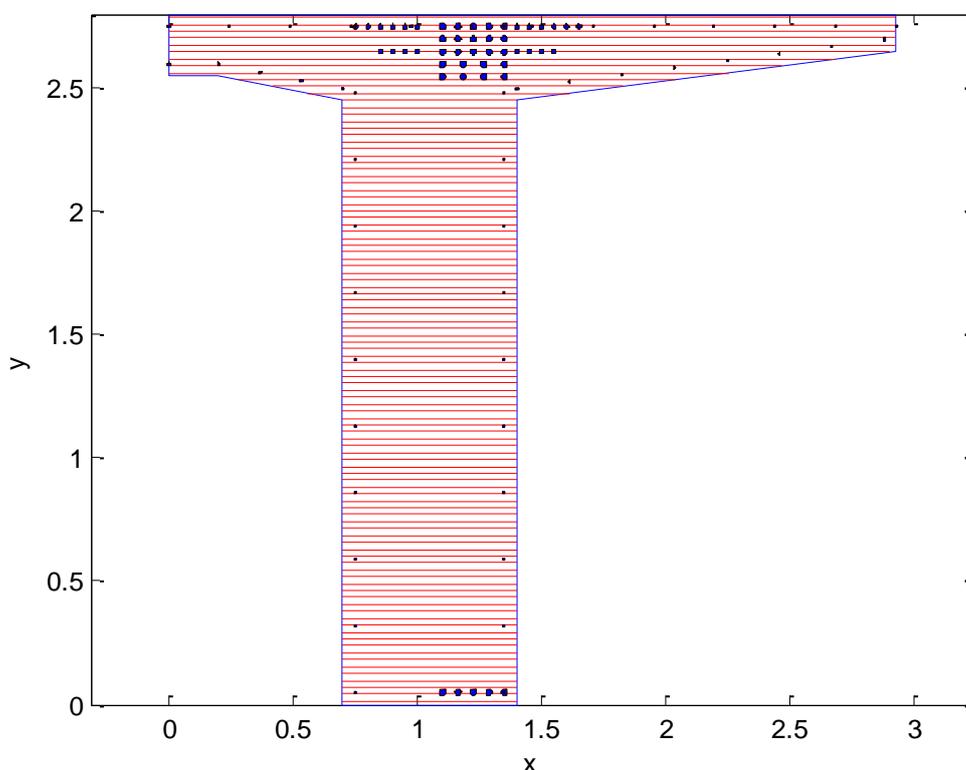
Nesta janela são visualizadas e editadas as propriedades da seção que está sendo analisada. Nela são definidas as propriedades geométricas da seção, e definidas as camadas ou faixas de armaduras da seção.

Como o *BridgeLab* e o *SecLab* trabalham de forma integrada as informações da seção são repassadas pelo *BridgeLab* ao *SecLab* automaticamente, assim como as propriedades físicas do material.

O *SecLab* possui uma série de algoritmos de análise de seção de concreto armado.

Esses algoritmos realizam a verificação dos estados limites últimos e de serviço das seções transversais dos elementos estruturais das pontes em estudo de acordo com as normas brasileiras referentes a concreto armado sob tensões normais e a verificação a fadiga é feita também de acordo com o CEB-90.

Estes programas realizam a verificação das seções submetidas à flexão, flexo-compressão reta e oblíqua. Essas análises consideram o comportamento não linear do concreto e do aço utilizando a discretização da seção em camadas.



**Figura 6-2 – Discretização em camadas de uma seção de longarina da ponte sobre o Rio Praqueú.**

## 6.1 Diagrama Momento Curvatura

A verificação de seções submetidas à flexão é feita através do diagrama momento *versus* curvatura da seção que fornece os valores máximos e mínimos de momento para um determinado carregamento axial.

Para isso é necessário que se forneça alguns parâmetros referentes a geração do diagrama momento *versus* curvatura. Esses parâmetros são informados através da interface mostrada na Figura 6-3.

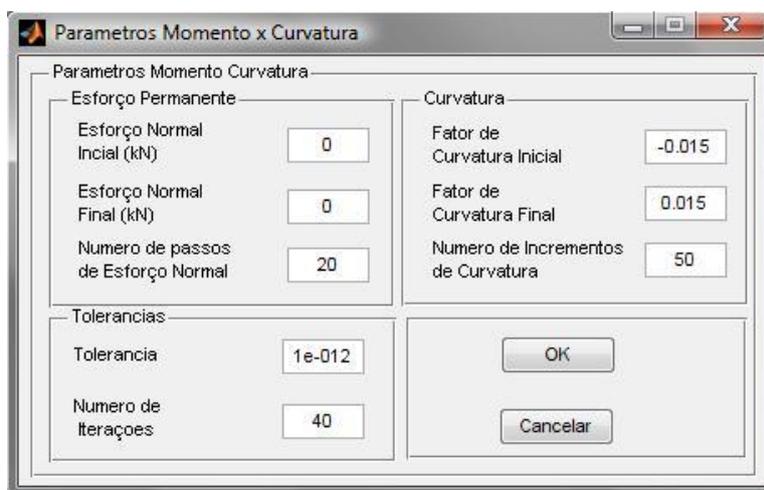


Figura 6-3 – Interface de parâmetros do diagrama momento *versus* curvatura.

A Figura 6-4 mostra o diagrama momento versus curvatura da seção de ligação da longarina com o encontro da ponte sobre o Rio Praqueú.

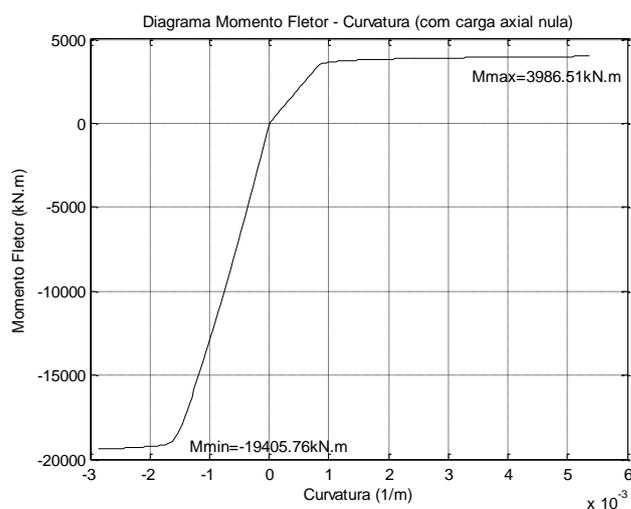


Figura 6-4 – Diagrama momento x curvatura da seção da longarina engastada no encontro da ponte sobre o Rio Praqueú.

O diagrama momento *versus* curvatura é obtido impondo curvaturas à seção e determinando o momento gerado pelas deformações impostas pela curvatura aplicada, para um determinado nível de esforço normal. Trata-se de um problema não linear, resolvido iterativamente pelo Método de Newton-Raphson. Obtêm-se desta forma os momentos máximos e mínimos que a seção suporta.

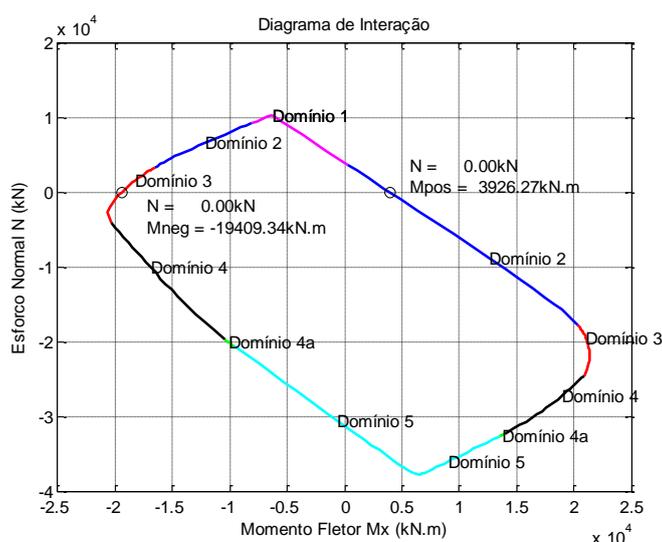
## 6.2 Diagrama de Interação

A verificação das seções submetidas à flexo-compressão reta, ou seja, seções submetidas a esforço normal e momento fletor, pode ser feita através do diagrama de interação da seção que fornece a curva das combinações de esforço normal e momento fletor que levam a seção à ruptura.

Assim, o diagrama de interação determina a região do gráfico onde as combinações de carregamento não levam a ruptura da seção. Dessa forma qualquer combinação de carregamento que estiver fora dessa região causa ruptura.

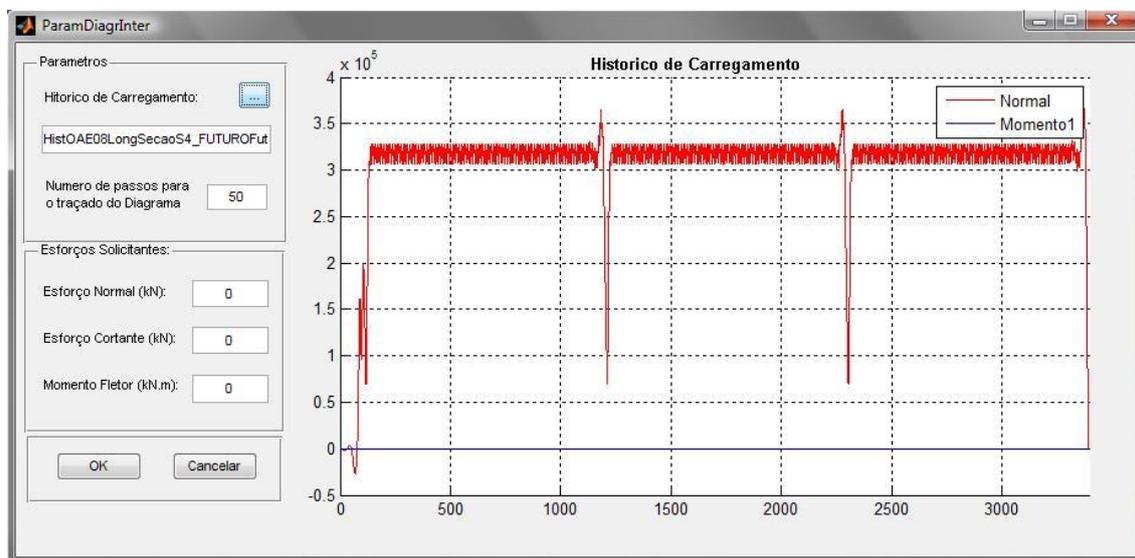
A Figura 6-5 mostra o diagrama de interação da seção da longarina da região onde ocorre a ligação entre a longarina e o encontro.

Pode-se observar na Figura 6-5 que são delimitados os domínios especificados na NBR – 6118, estes domínios são referentes as estado de deformações do concreto e do aço.



**Figura 6-5 – Diagrama de interação da seção da ligação entre a longarina e o encontro da ponte sobre o Rio Praqueú.**

Para a geração do diagrama de interação, uma das informações passadas ao programa é o histórico de carregamento obtido através da análise da estrutura no *BridgeLab* utilizando um trem-tipo definido pelo usuário. A Figura 6-6 mostra a tela onde esses dados são informados e onde é possível visualizar o histórico de carregamento ao qual a seção está submetida.

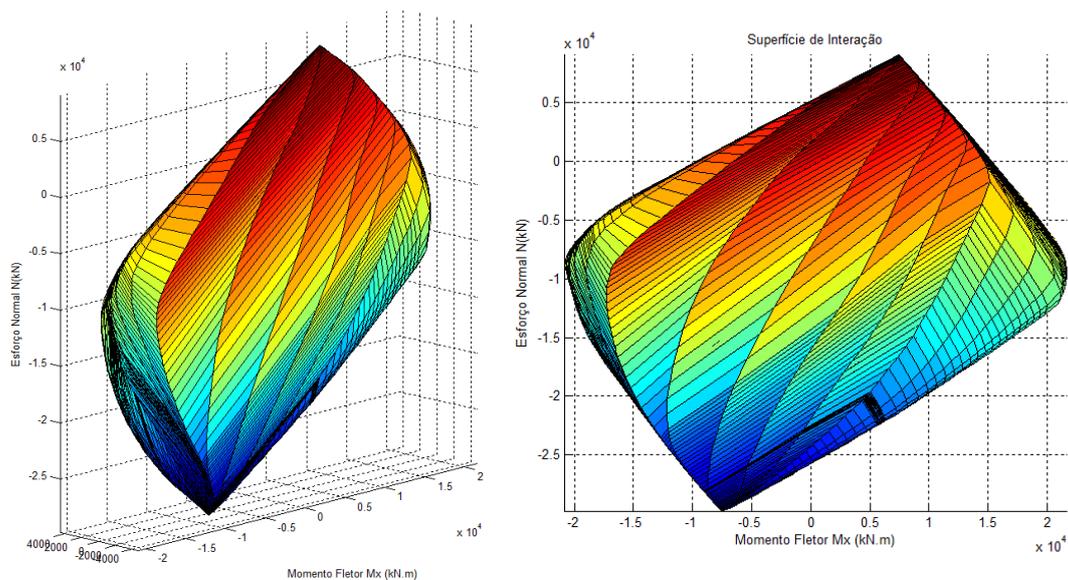


**Figura 6-6 – Parâmetros para a geração do diagrama de interação e visualização do histórico de carregamento da seção.**

### 6.3 Superfície de Interação

Para verificarmos seções submetidas à flexo-compressão oblíqua, ou seja, seções submetidas simultaneamente a esforço normal, momento fletor em torno do eixo y e momento fletor em torno do eixo z, é utilizada a superfície de interação.

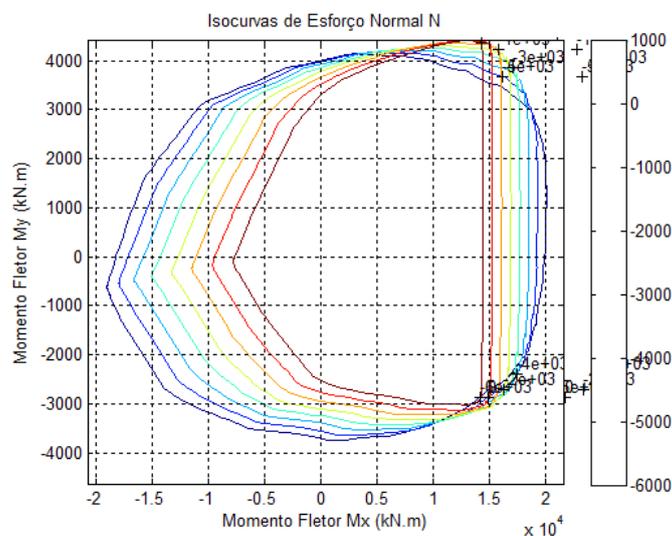
A superfície de interação parte do mesmo princípio do diagrama de interação, delimitando uma região onde as combinações de esforços nesta região não levam a seção à ruptura e os pontos de combinação de esforços fora dessa região levam a seção a ruptura.



**Figura 6-7 – Superfície de interação da seção da ligação entre a longarina e o encontro da ponte sobre o Rio Praqueú.**

Além da superfície de interação, o usuário pode visualizar isocurvas da superfície, que são curvas com o mesmo valor de um determinado esforço. A seguir são mostradas as isocurvas da superfície de interação da Figura 6-7.

As isocurvas da Figura 6-8 representam as combinações máximas de momentos fletores para determinados valores de esforço normal, onde os estados de solicitação que estejam contidos pelas isocurvas são suportados pela seção transversal estudada e os estados de solicitação situados fora das isocurvas levam a seção à ruína, ou seja, ultrapassam o limite de resistência da seção.



**Figura 6-8 – Isocurvas de esforço normal.**

De forma análoga temos as isocurvas de momentos fletores, Figura 6-9 e Figura 6-10, que representam os limites de resistência para um valor de momento fletor fixo em um dos eixos, x ou y.

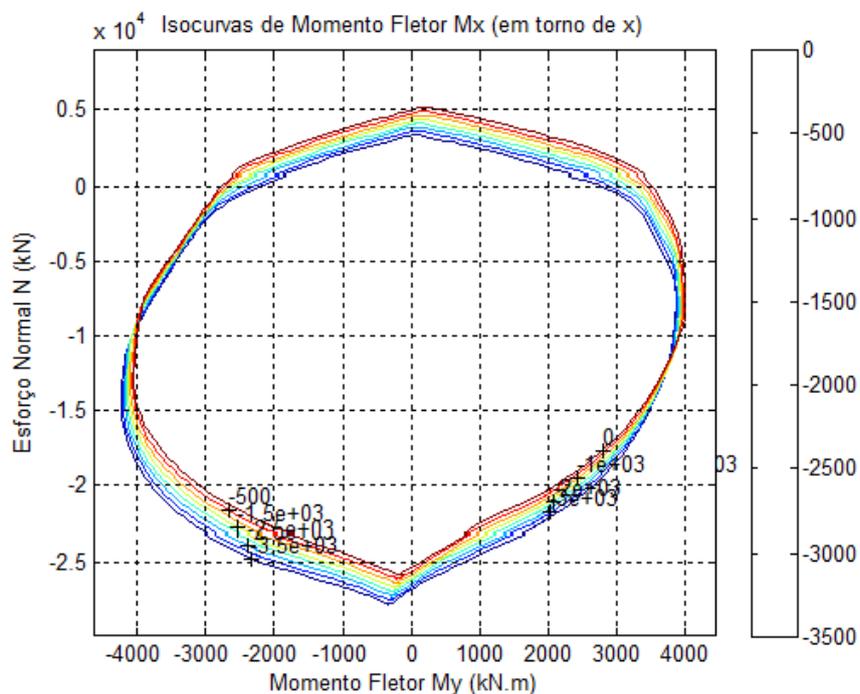


Figura 6-9 – Isocurvas de momento fletor na direção x.

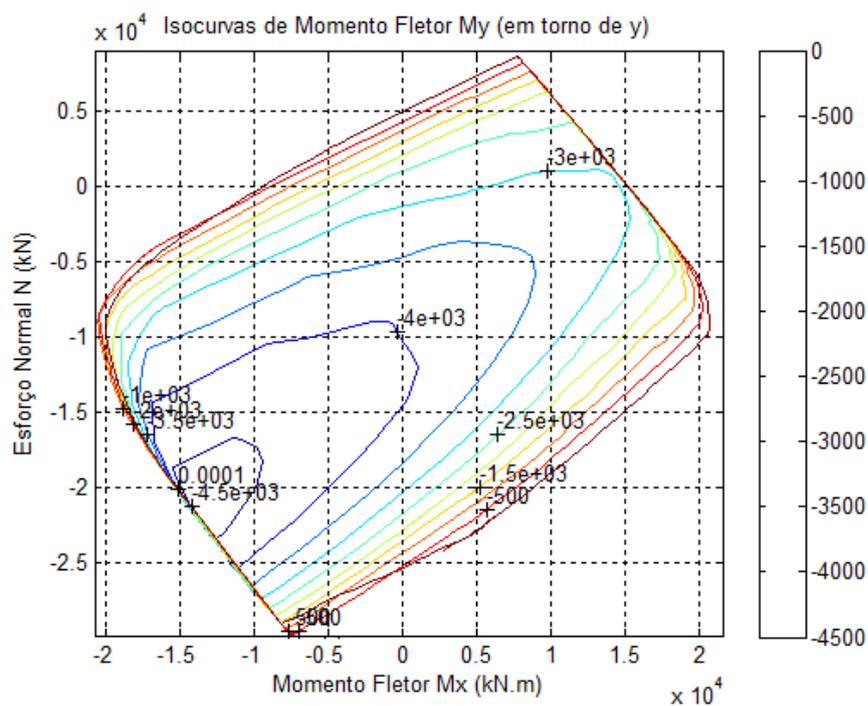


Figura 6-10 – Isocurvas de momento fletor na direção y.

## 6.4 Fadiga dos Materiais

A determinação da vida útil à fadiga dos elementos estruturais é feita segundo a NBR – 6118 que estabelece um limite de tensão como é descrito no capítulo referente às prescrições normativas no item 4.3.1.5 Resistência à Fadiga. E também de acordo com o CEB – 90 que estabelece outros processos de verificação mais precisos.

Uma das metodologias preconizadas pelo CEB – 90 faz uso da contagem de ciclos utilizando o algoritmo *Rainflow*.

Porém, para determinar o número de ciclos é necessário que se determine o histórico de tensões dos pontos de verificação na seção através do histórico de carregamento.

As informações para o cálculo do histórico de deformações e tensões são passadas ao programa através da interface da Figura 6-11.

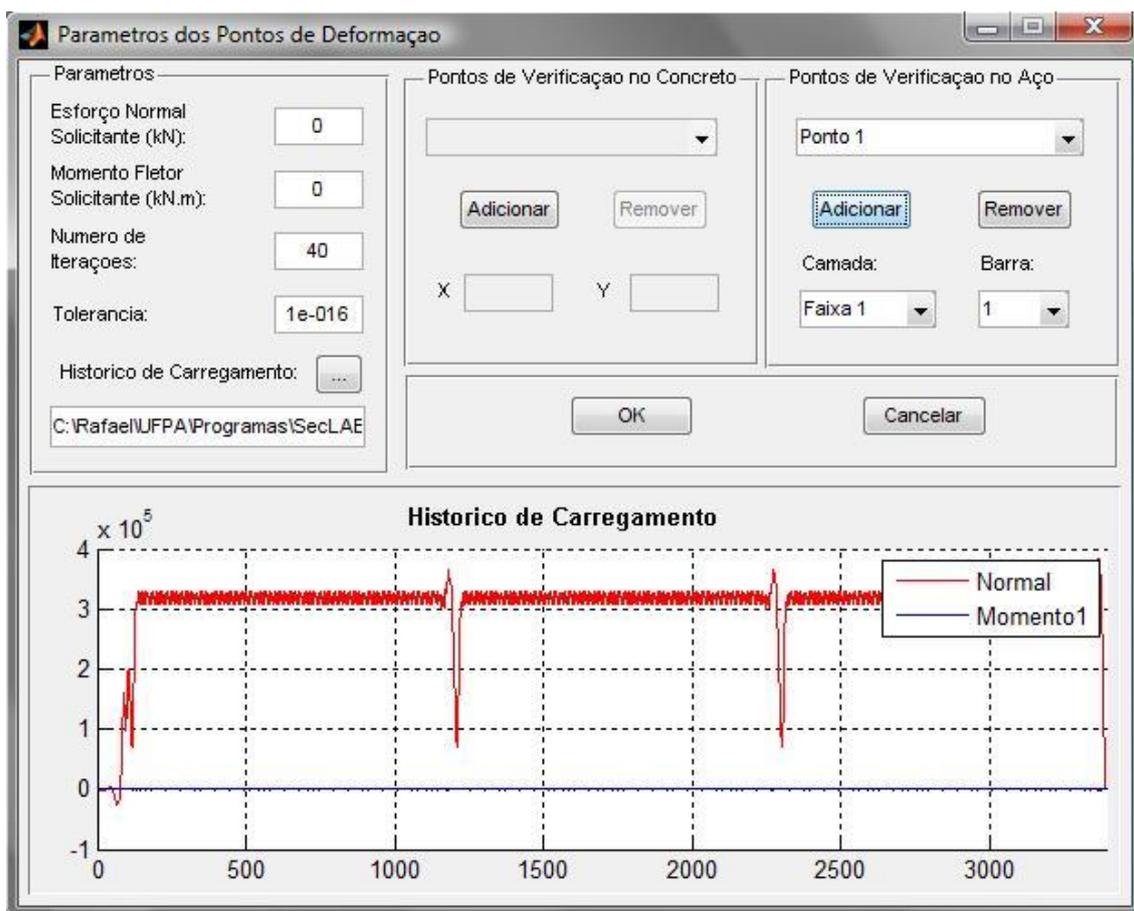


Figura 6-11 – Parâmetros para determinação do histórico de deformações e tensões.

De acordo com o CEB – 90, para determinar a vida útil à fadiga, é necessário que se verifique quatro pontos no concreto, quais sejam, a fibra superior, a fibra inferior e 30cm abaixo e acima das mesmas fibras.

A determinação do histórico de deformações e tensões desses quatro pontos é feito automaticamente pelo programa.

Para as armaduras verificam-se geralmente as armaduras mais próximas das fibras inferiores e superiores. Mas isso é feito de acordo com as características do carregamento e da seção. A Figura 6-12 mostra a interface onde são inseridos os parâmetros necessários para a avaliação da vida útil à fadiga.

Parametros dos Pontos de Def...

Parâmetros de Fadiga

Numero de Ciclos da Interseção da curva SN (N\*): 1e+006

Expoente da Curva 1 (k1): 5

Expoente da Curva 2 (k2): 9

Tensão de Ruptura do Aço fyu (kN/m2): 550000

Tempo em começou a atuar a carga de fadiga (dias): 365

Coeficiente que considera o tipo de cimento: 0.25

Número de Pontos de Verificação do Concreto: 2

Numero de Pontos de Verificação do Aço: 0

Arquivo com o historico de deformação dos ponto:

OK Cancelar

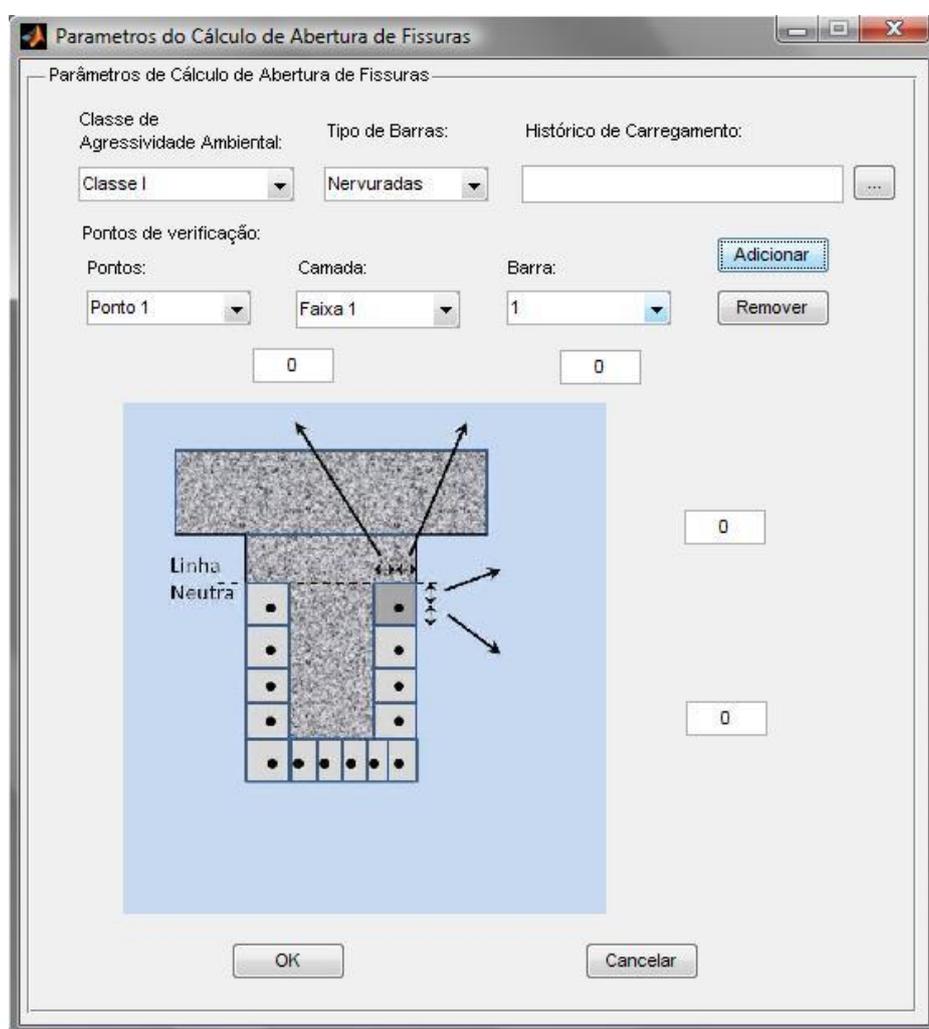
**Figura 6-12 – Parâmetros para determinação da vida útil à fadiga.**

As informações necessárias para a determinação desses parâmetros encontram-se nas normas utilizadas para o calculo, NBR – 6118 e CEB – 90.

## 6.5 Abertura de Fissuras

A verificação do limite de abertura de fissuras é feito de acordo com a NBR – 6118, e leva em conta o nível de tensão nas armaduras tracionadas. Para isso também é necessário a obtenção do histórico de tensões e como já foi descrito no item anterior sobre vida útil à fadiga.

De acordo com a NBR – 6118 é necessário que seja informada a área de envolvimento por concreto de cada barra verificada como mostra a interface da Figura 6-13.



**Figura 6-13 – Parâmetros para determinação do limite de abertura de fissuras.**

Assim, a NBR – 6118 especifica limites de abertura de fissuras de acordo com a classe de agressividade ambiental em que se localiza a estrutura estudada.

Os limites são abertura de fissuras para concreto armado são:

Classe I:  $w_k \leq 0,4\text{mm}$

Classe II e III:  $w_k \leq 0,3\text{mm}$

Classe IV:  $w_k \leq 0,2\text{mm}$

Onde  $w_k$  é o valor da abertura da fissura.

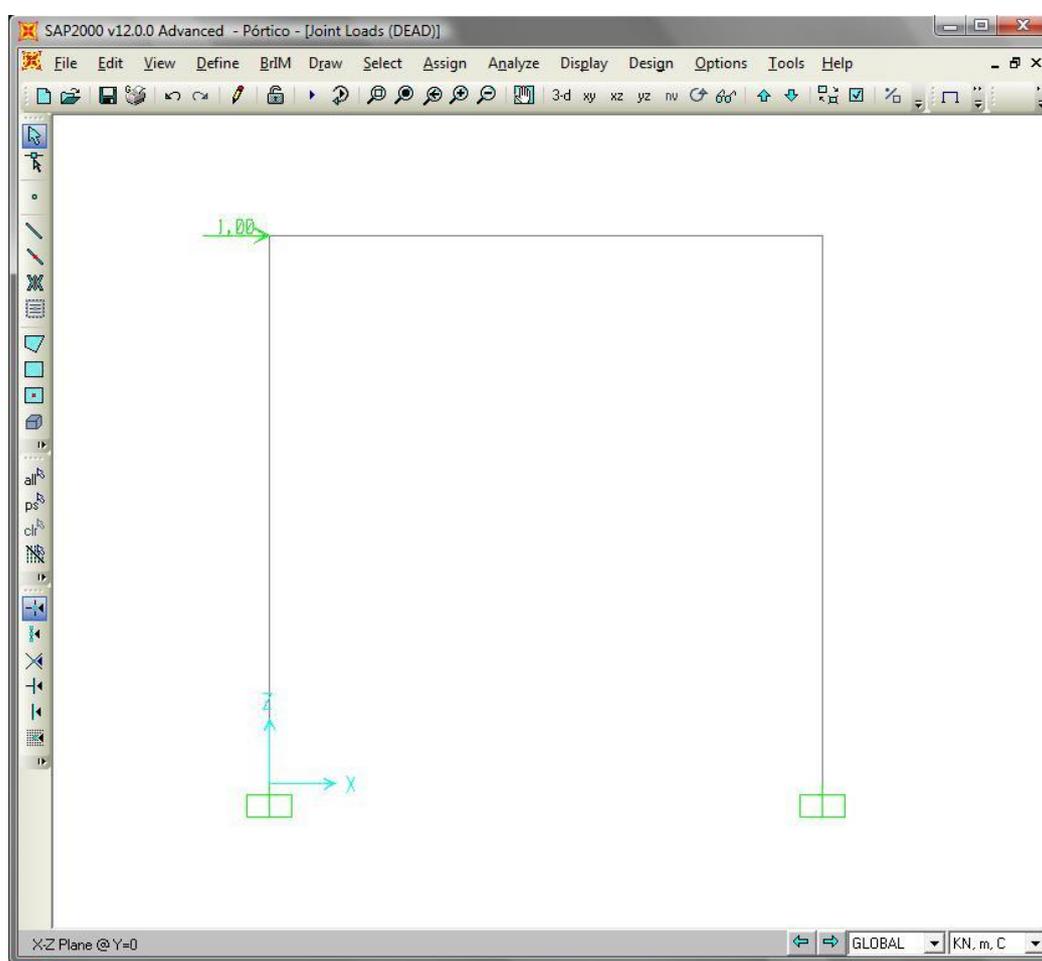
## CAPÍTULO 7

### Resultados.

---

Para exemplificar a utilização do programa, a estrutura de um pórtico será analisada no *BridgeLab* e no programa SAP2000 v 12.0.2. O programa SAP2000 foi utilizado no projeto de pesquisa de parceria entre a Universidade Federal do Pará e a companhia Vale, mencionado anteriormente.

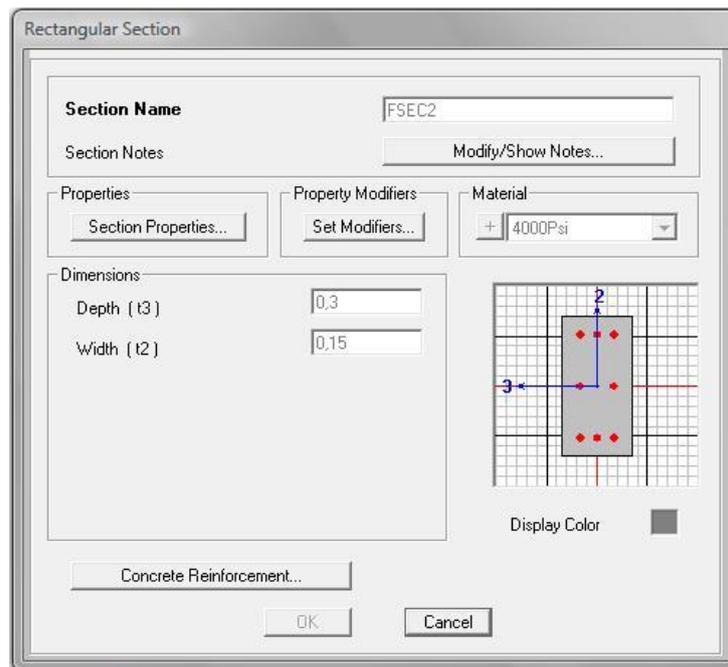
A Figura 7-1 mostra o pórtico estudado no programa SAP2000.



**Figura 7-1 – Definição da estrutura no programa SAP2000.**

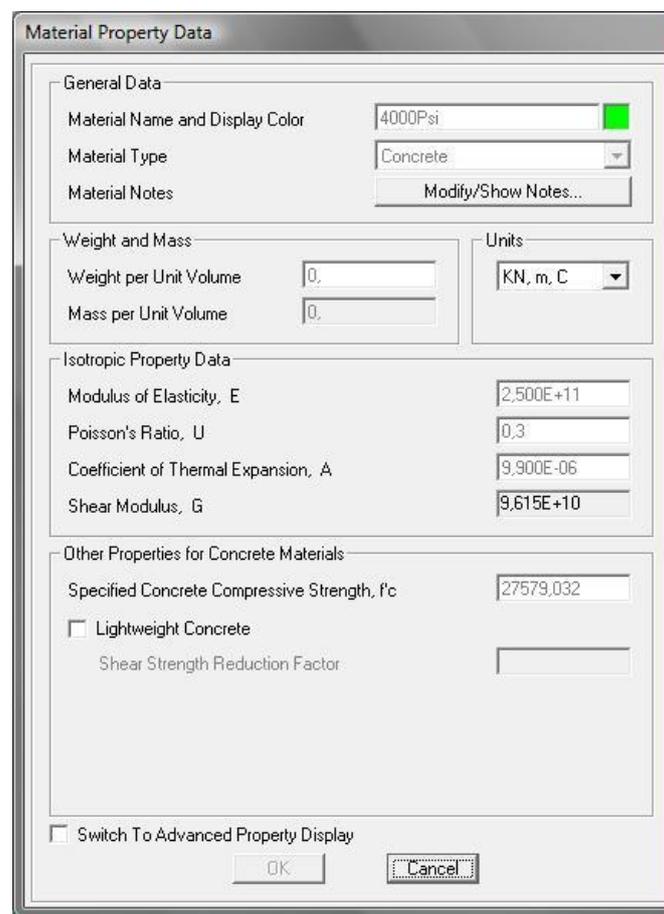
Cada elemento da estrutura possui 10m de comprimento e é formado por seção transversal retangular de 15cm x 30cm.

A Figura 7-2 mostra a seção transversal utilizada no programa SAP2000.



**Figura 7-2 – Geometria da seção transversal no programa SAP2000.**

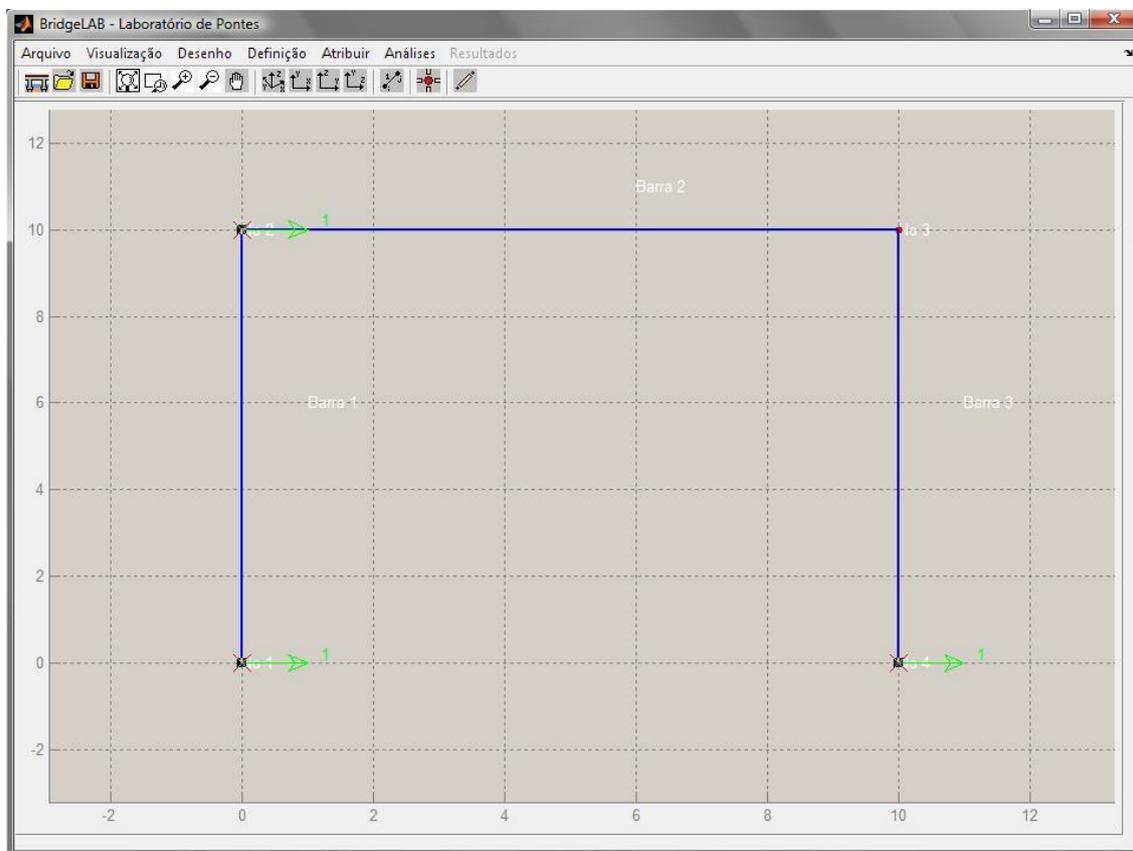
A Figura 7-3 mostra as propriedades físicas do material utilizado no modelo.



**Figura 7-3 – Propriedades do material no programa SAP2000.**

A seguir será descrito o modelo do mesmo pórtico modelado no *BridgeLab*.

### Definição da estrutura no *BridgeLab*.



**Figura 7-4 – Definição da estrutura no *BridgeLab*.**

A mesma seção transversal e as propriedades do material foram mantidas nos dois programas para realizar a comparação dos resultados. Estes dados estão mostrados na Figura 7-5 e na Figura 7-6.

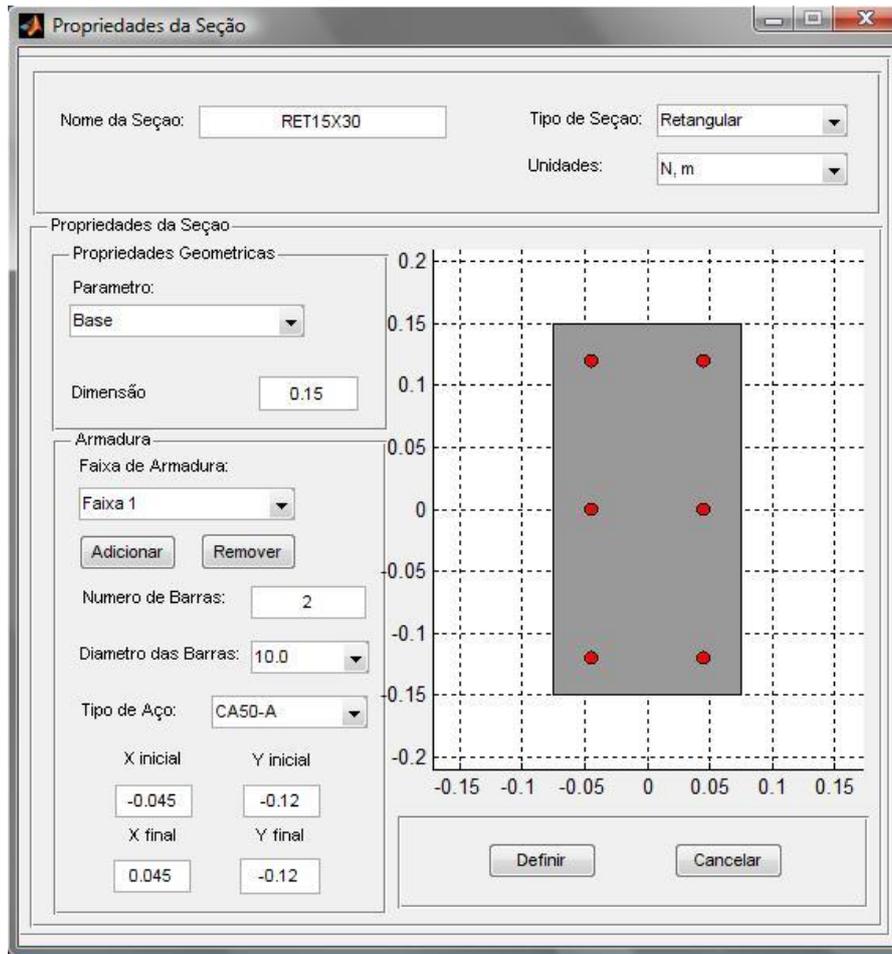


Figura 7-5 – Geometria da seção transversal no programa *BridgeLab*.

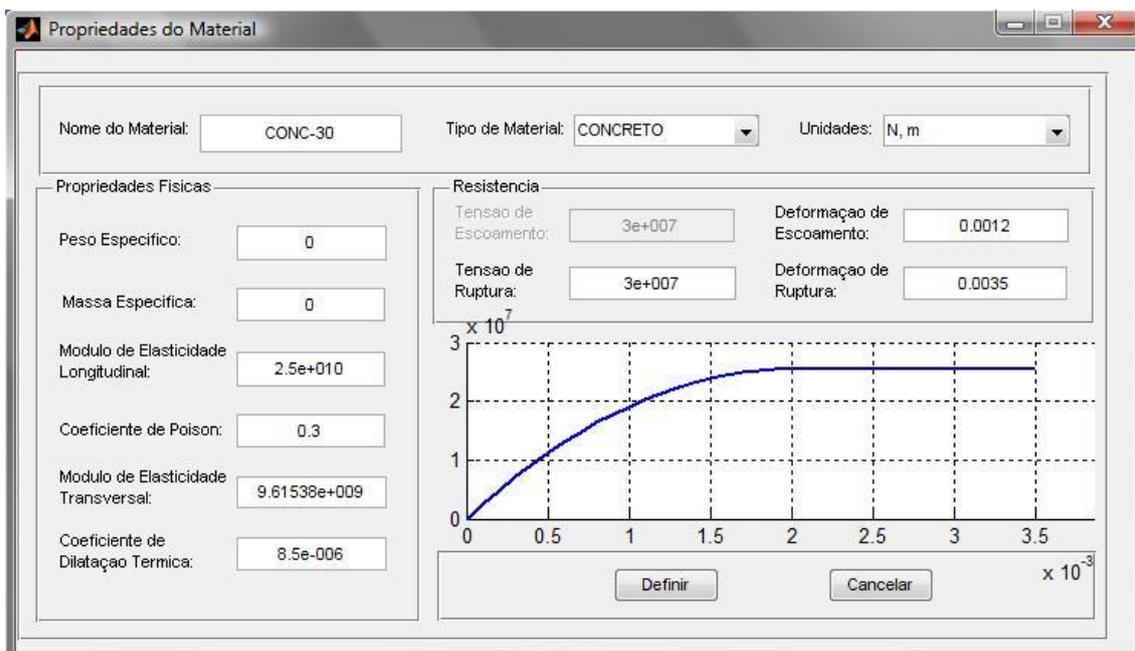


Figura 7-6 – Propriedades do material no programa *BridgeLab*.

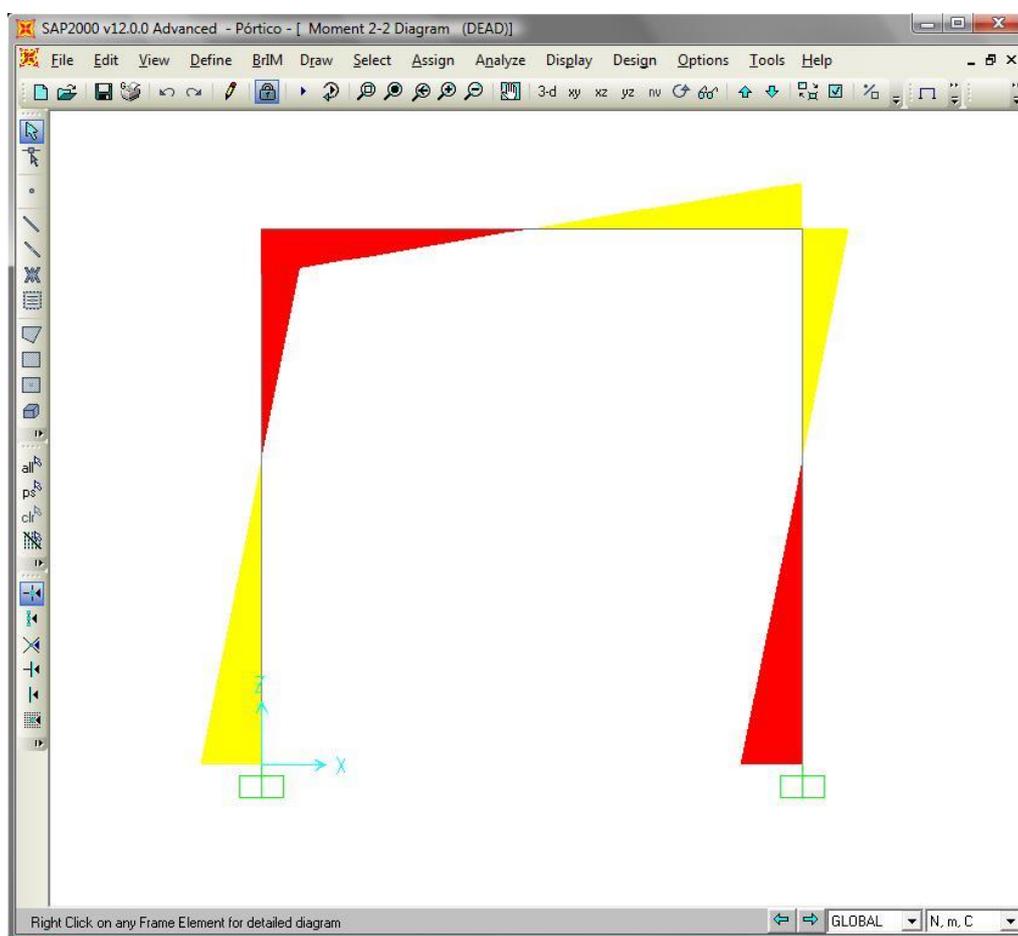
Em ambos os programas foi aplicada uma carga na direção x como ilustrado na Figura 7-1 e na Figura 7-4.

A

**Tabela 4 – Comparação dos resultados de deslocamentos nos dois programas.**

Deslocamentos	BridgeLab	SAP2000
x	2,8243E-09	2,8240E-09
y	3,8089E-13	3,8090E-13
rotação z	-1,6950E-10	1,6950E-10

A seguir são mostrados os diagramas de esforços no SAP2000.



**Figura 7-7 – Diagrama de momentos fletores no SAP2000.**

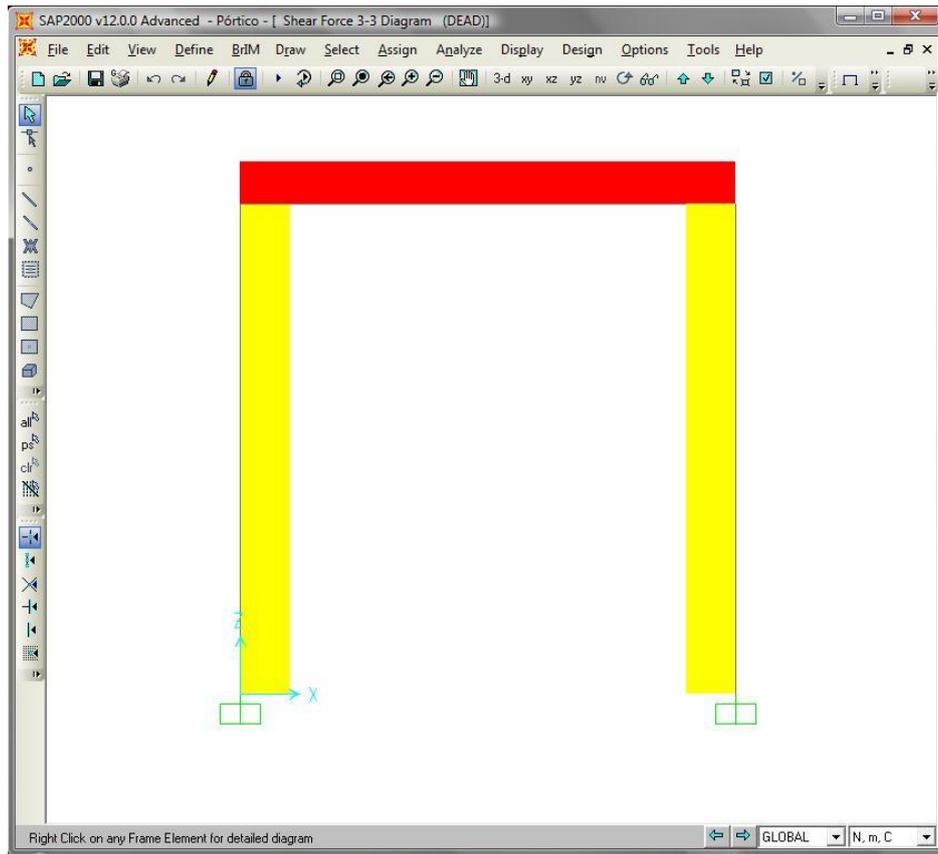
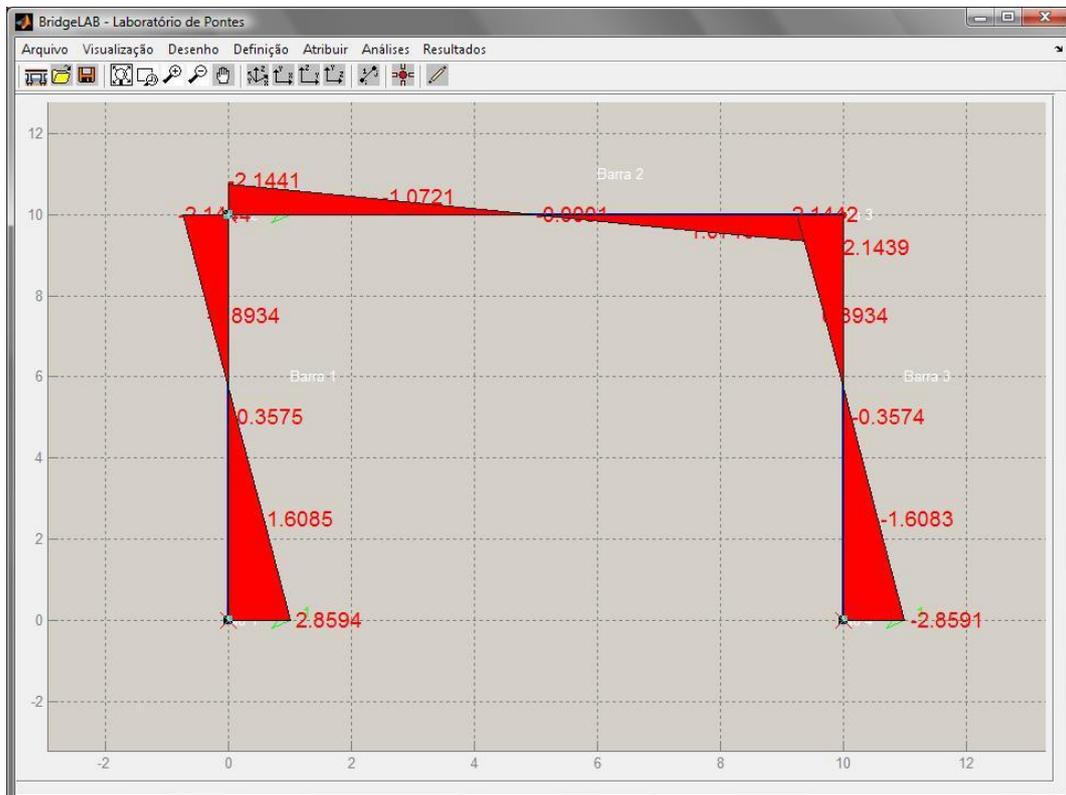
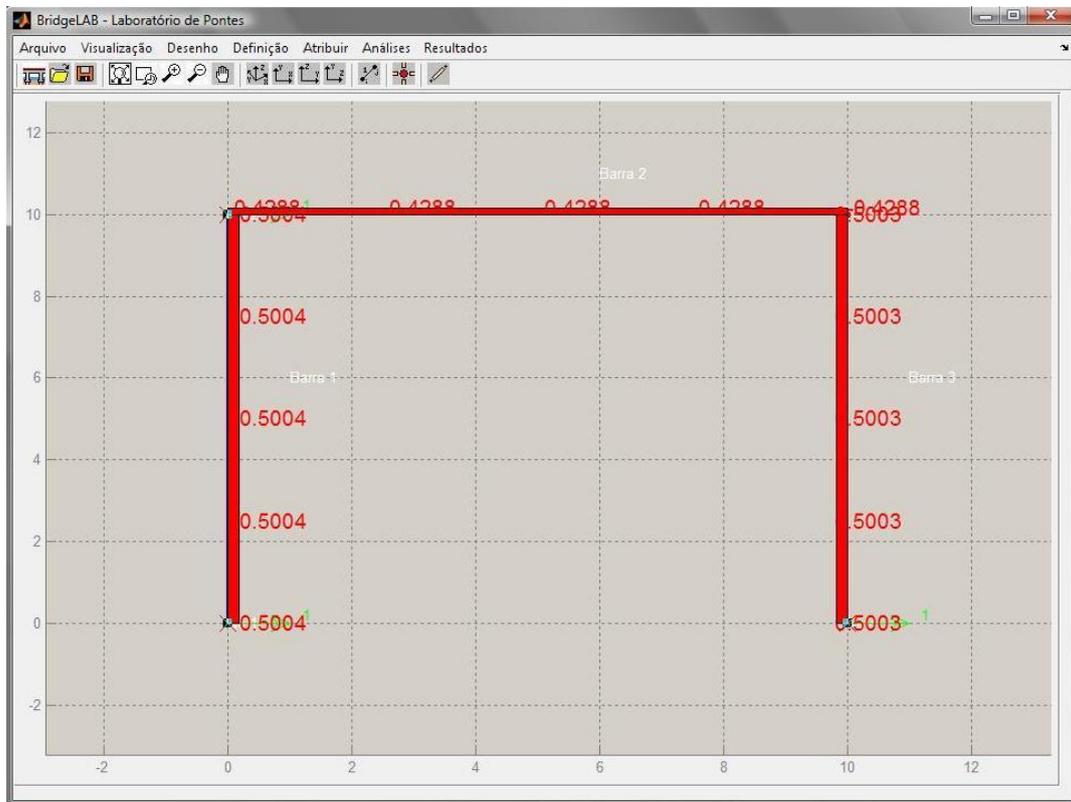


Figura 7-8 – Diagrama de esforço cortante no SAP2000.

Diagramas de esforços no programa *BridgeLab*.



**Figura 7-9 – Diagrama de momentos fletores no *BridgeLab*.**



**Figura 7-10 – Diagrama de esforço cortante no *BridgeLab*.**

## CAPÍTULO 8

### Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

---

O programa desenvolvido neste trabalho tinha como objetivo a disponibilização de uma ferramenta capaz de analisar estruturas de pontes ferroviárias em concreto armado e que gerasse automaticamente o carregamento móvel referente às cargas do trem-tipo.

A utilização do elemento de pórtico formulado pelo método das forças foi de grande importância pelo fato de considerar variações de seções quaisquer resultando numa modelagem mais precisa e conseqüentemente fornecendo resultados também mais precisos.

Assim, objetivaram-se bons resultados na utilização do programa como pode ser visto na comparação dos resultados entre o *BridgeLab* e o *SAP2000*.

Outro fato importante é a facilidade na utilização do programa principalmente na geração do trem-tipo através dos veículos definidos pelo usuário.

Durante os testes verificou-se a estabilidade e eficiência dos códigos da interface e também as vantagens da utilização da programação orientada a objeto que facilitaram o trabalho de desenvolvimento dos algoritmos.

A seguir são relacionadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Implementar algoritmo de análise não linear física da estrutura, para determinar a rigidez da estrutura de acordo com o nível de carregamento considerando os efeitos da fissuração e da plastificação dos materiais.
- Analisar estruturas de concreto protendido, pois existe um grande número de pontes que utilizam protensão.
- Considerar a interação entre o veículo e a estrutura, para obter melhores resultados na análise dinâmica da estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEMANG, R. J., **Vibrations: Experimental Modal Analysis**, Course Notes. Seventh edition, structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH, USA, 1999.

AMADOR, S.D.R. **Programa Computacional com Interface Gráfica para Identificação Estocástica de Parâmetros Modais de Estruturas Cíveis - Aplicação em Pontes e Torres de Linha de Transmissão**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Pará, Brasil, 2007.

CHOPRA, ANIL K. **Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering**.

CLOUGH, R. W. e J. PENZIEN. **Dynamics of Structures**: McGraw-Hill. 1993.

COOK, R. D., D. S. MALKUS e M. E. PLESHA. **Concepts And Applications Of Finite Elements Analysis**: John Wiley & Sons. 1989.

DE SOUZA R.M. **Force-based Finite Element for Inelastic Large Displacement Analysis of Frames**. University of California at Berkeley, UCB, Estados Unidos, 2000.

MEIRELES JOSÉ, **Dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente**, 8º Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica, 2007.

MAZZONI, S. MCKENN, F. SCOTT, M.H. FENVES G. L. et al. **OpenSees Command Language Manual**, Estados Unidos, 2006.

ROSA M.B.C., **Desenvolvimento de um Pré-Processador Gráfico Interativo no Ambiente do AutoCad para Análise de Estruturas Reticuladas Tridimensionais Submetidas ao Carregamento do Vento**, Universidade Federal do Pará, UFPA, Brasil, 2007.

COOK, R. D. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 1989

PEREIRA, A. M. B. **Elementos Finitos de Barras Formulados pelos Métodos dos Deslocamentos e Forças para Análise Linear Estática e Dinâmica**. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, 2002. 162 p.

PFEIL, W. **Pontes em Concreto Armado**. Rio de Janeiro, v.1. 1990. 490 p.

SAMPAIO, R.C., MAGALHÃES DE SOUZA, R. **Desenvolvimento de metodologia para avaliação da integridade estrutural de pontes e viadutos ferroviários ao longo da Estrada de Ferro Carajás**. Convenio UFPA-Vale, 2007.